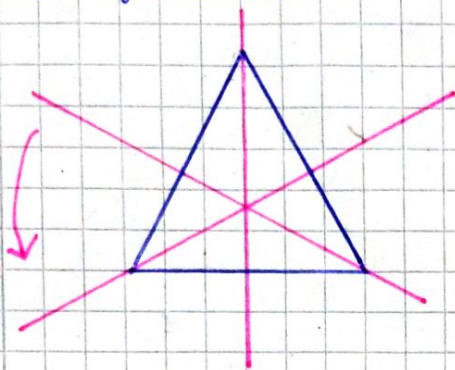


Klausurtermine: 20. Juli, 8. September

Di, 24. Mai fällt aus

## § 5 Symmetrien



gleichseitig



gleichschenkelig, nicht gleichseitig

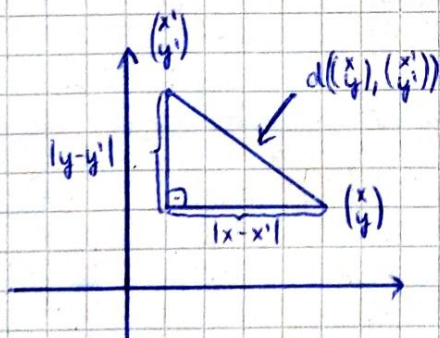
Anhand von Symmetrien lassen sich Objekte unterscheiden.

→ Formalisierung durch Gruppen

(Erviniste Galois, 1811 - 1832, Erlanger Programm von Felix Klein 1870er)

5.1 Def: Eine (ebene) Isometrie (oder: Bewegung) ist eine längenerhaltende, bijektive Abbildung der (euklidischen) Ebene  $\mathbb{R}^2$  auf sich selbst.

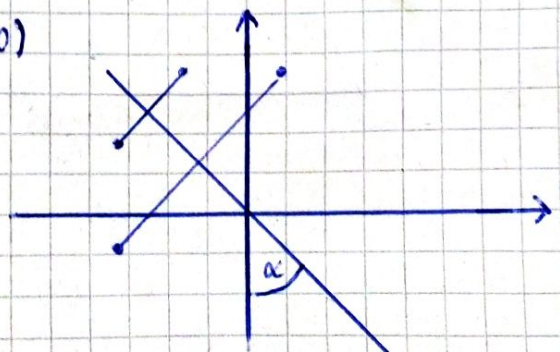
$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad d(T(\vec{x}), T(\vec{x}')) = d(\vec{x}, \vec{x}') := \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \quad \forall (\vec{x}, \vec{x}') \in \mathbb{R}^2$$



5.2 Lemma: Die folgenden Abbildungen sind Isometrien:

(a) Spiegelung an einer Geraden  $s_\alpha$ ,  $\alpha \in [0, 180)$

$$[\text{Bsp.: } s_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}]$$

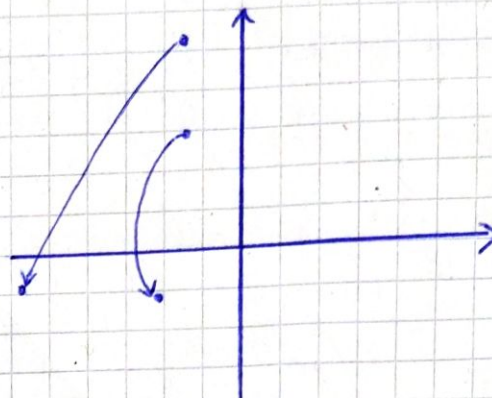


(b) Drehung  $d_\varphi$ ,  $\varphi \in [0, 360)$  um Winkel  $\varphi$  nach links

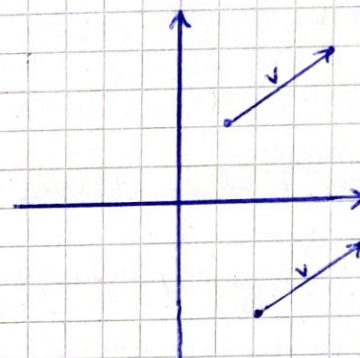
[Bsp.  $d_{90} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ ]

Längenerhaltend:

$$\begin{aligned} d(d_{90} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, d_{90} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}) &= d \left( \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y' \\ x' \end{pmatrix} \right) \\ &= \sqrt{((-y) - (-y'))^2 + (x - x')^2} = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} \\ &= d \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$



(c) Translation  $t_v$ ,  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$



(d) Punktspiegelung ( $d_{180}$  & Translation)

5.3 Def:

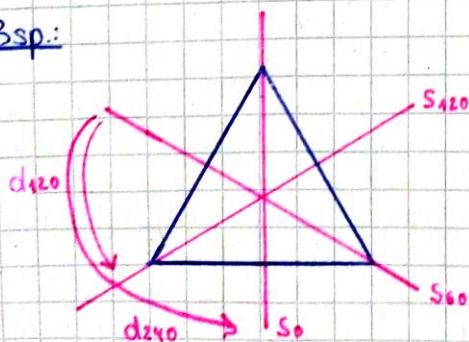
a) Eine Figur ist eine Teilmenge  $M \subseteq \mathbb{R}^2$ .

b) Eine Deckabbildung / Kongruenzabbildung ist eine Isometrie der Ebene, die die Figur auf sich selbst abbildet (also für  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  ist  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $T(M) = M$  eine Deckabbildung von  $M$ ).

c) Zwei Figuren heißen kongruent, falls eine Isometrie zwischen ihnen ex., die die eine auf die andere abbildet.

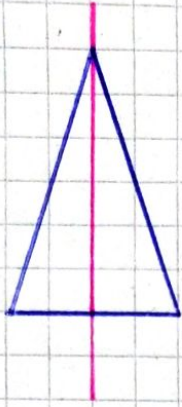
5.4 Bsp:

a)



$$D_3 = \{id, d_{120}, d_{240}, s_0, s_{60}, s_{120}\}$$

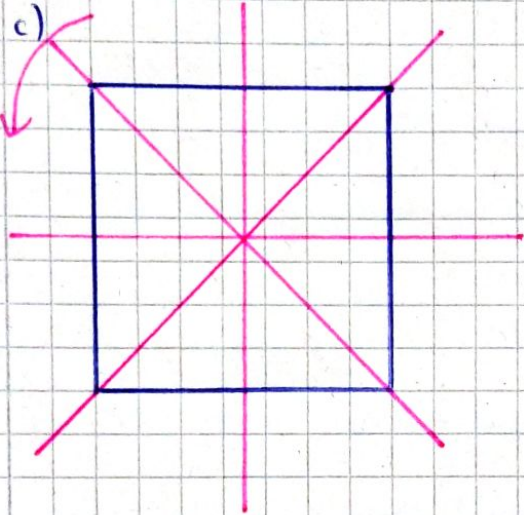
b)



$$\{id, s_0\}$$

(nicht  $s_{60}$ )

c)



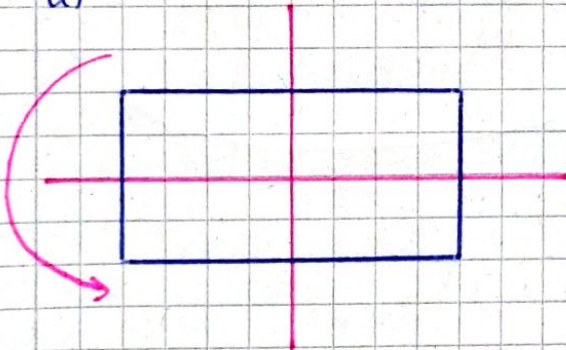
$$D_4 = \{id, d_{90}, d_{180}, d_{270}, s_0, s_{45}, s_{90}, s_{135}\}$$

Quadrat

U

d)

$$D_2 = \{id, d_{180}, s_0, s_{90}\}$$



5.5 Prop: Die Deckabbildung des regelmäßigen  $n$ -Ecks ( $n \geq 3$ ):

$$D_n = \{id, d_{\frac{360}{n}}, d_{2 \cdot \frac{360}{n}}, \dots, d_{(n-1) \cdot \frac{360}{n}}, s_0, s_{\frac{180}{n}}, \dots, s_{(n-1) \cdot \frac{180}{n}}\}$$

5.6 Def:  $(G, \circ)$  Gruppe mit  $\circ: G \times G \rightarrow G$ , falls

$$(1) (g \circ h) \circ k = g \circ (h \circ k) \quad \forall g, h, k \in G \quad (\text{Assoziativität})$$

$$(2) \exists e \in G \quad \forall g \in G: g \circ e = g, e \circ g = g \quad (\text{neutrales Element})$$

$$(3) \forall g \in G \exists g^{-1} \in G: g \circ g^{-1} = e, g^{-1} \circ g = e \quad (\text{inverses Element})$$

$G$  heißt abelsch, falls  $\forall g, h \in G: g \circ h = h \circ g$ .

## 5.7 Bsp:

(a)  $(\mathbb{Z}, +)$  abelsche Gruppe

denn:  $+: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  assoziativ  $((k+l)+m = k+(l+m))$   
 $(k, l) \mapsto k+l$

neutrales Element:  $e=0$  ( $k+0=k, 0+k=k$ )

inverse Elemente: Zu  $k \in \mathbb{Z}$  ist  $-k \in \mathbb{Z}$  das inverse Element, denn  $k+(-k)=0, (-k)+k=0$

abelsch:  $k+l=l+k$

(b)  $D_n$  ist nicht abelsche Gruppe mit der Hintereinanderausführung.

Bsp.:  $D_3$

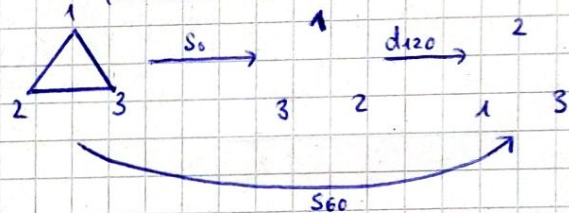
Tabelle

| goh  | id | d120 | d240 | s0  | ... |
|------|----|------|------|-----|-----|
| id   | id | d120 |      |     |     |
| d120 |    | d240 |      | s00 |     |
| :    |    |      |      |     |     |

$$d_{120} \circ d_{120} = d_{240}$$

$$d_{120} \circ s_0 = s_{60}$$

(von rechts nach links ausführen)



• geht von  $D_3 \times D_3$  nach  $D_3$  (Tabelle ✓)

Assoziativität: ✓

neutrales Element:  $e = id$

inverse Elemente:  $d_{120}^{-1} = d_{240}$  (denn  $d_{120} \circ d_{240} = id$ )

Permutationsschreibweise:  $\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  bijektiv „Permutation“

$$\sigma = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ & \searrow & \nearrow \\ & 1 & 2 \\ & \nearrow & \searrow \\ 1 & 2 & 3 \end{array} = \begin{array}{l} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 1 \end{array} = (1, 2, 3) \text{ Zykelschreibweise}$$

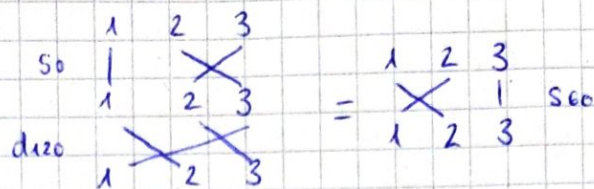
$$d_{120} \hat{=} (1, 2, 3)$$

$$s_0 \hat{=} (1)(2, 3) = (2, 3)$$

$$= \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ & \searrow & \nearrow \\ & 1 & 2 \\ & \nearrow & \searrow \\ 1 & 2 & 3 \end{array}$$

$$s_{60} \hat{=} (1, 2)$$

$$d_{120} \circ s_0 = s_{60}$$



$$d_{120} \circ s_0 = (1,2,3) \circ (2,3) = (1,2) = s_{60}$$

$S_n := \{\text{Menge aller Permutationen } \sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}\}$

Permutationsgruppe, Symmetrische Gruppe

mit  $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$ , inverse Elemente: (flip (z.B.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ))

$S_n$  hat  $n!$  Elemente

(c)  $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  mit  $k+l = k+l \text{ modulo } n$  (d.h.  $k+l$ , geteilt durch  $n \leadsto \text{Rest}$ )

„zyklische Gruppe“ ist eine abelsche Gruppe

$$\text{in } \mathbb{Z}_3: 1+1=2 \quad \text{in } \mathbb{Z}_7: 5+4=2 \quad \text{in } \mathbb{Z}_2: 1+1=0$$

$$2+1=0$$

Tabelle:

| $\mathbb{Z}_3$ | 0 | 1 | 2 |
|----------------|---|---|---|
| 0              |   |   |   |
| 1              |   |   | 0 |
| 2              |   |   |   |

$$\mathbb{Z}_n \triangleq \{\text{id}, d_{\frac{360}{n}}, d_{2 \cdot \frac{360}{n}}, \dots, d_{(n-1) \cdot \frac{360}{n}}\}$$

(1)  $(1, 2, 3, \dots, n-1)$   $\uparrow$   $(1, 3, 5, \dots)$  ungerade  
 $(\dots)(\dots)$  gerade

Kann sehen:  $\mathbb{Z}_n \subseteq D_n \subseteq S_n$