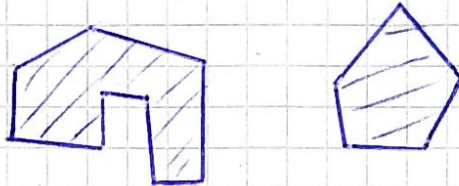


II 3-dimensionale Geometrie

§6 Polyeder

6.1 Def.:

(a) Ein Polygon (Vieleck) ist eine Figur $P \subseteq \mathbb{R}^2$, die durch einen geschlossenen Streckenzug begrenzt wird.

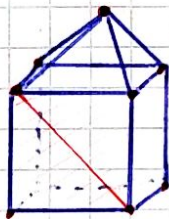


(b) Ein Polyeder ist ein Körper $P \subseteq \mathbb{R}^3$, der durch Polygone begrenzt wird.



(c) Ein Polyeder $P \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt konvex, wenn zu je zwei Punkten $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in P$ auch die ganze Verbindungsstrecke $t \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + (1-t) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, t \in [0,1]$ in P liegt.

(Konvexkombination der Punkte)

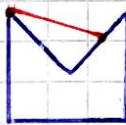
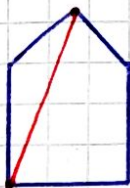


konvex



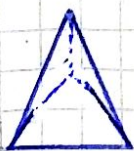
nicht konvex

in $\mathbb{R}^2$:



Es gilt: Ein Polyeder ist gegeben durch die Konvexkombinationen aller Eckpunkte.

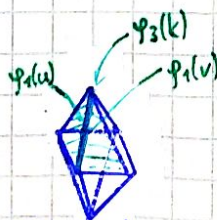
(d) Ein Polyeder heißt regulär, wenn alle Flächen zueinander kongruente, regelmäßige Vierecke sind und in jeder Ecke gleich viele Kanten zusammenstoßen.



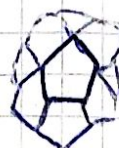
Tetraeder



Hexaeder



Oktaeder



Dodekaeder



Isokaeder

6.2 Bsp: reguläre, konvexe Polyeder (= platonische Körper)

	Tetraeder	Hexaeder (Würfel)	Oktaeder	Dodekaeder	Isokaeder
Seitenflächen n -Eck	3	4	3	5	3
Kanten an jeder Ecke m	3	3	4	3	5
Anzahl Flächen f	4	6	8	12	20
Anzahl Ecken e	4	8	6	20	12
Anzahl Kanten k	6	12	12	30	30

6.3 Def:

Seien $P, \hat{P}$ konvexe Polyeder. $\hat{P}$ heißt (kombinatorisch) dual zu P , falls es Bijektionen

$$\varphi_1: \{\text{Ecken von } P\} \rightarrow \{\text{Flächen von } \hat{P}\}$$

$$\varphi_2: \{\text{Flächen von } P\} \rightarrow \{\text{Ecken von } \hat{P}\}$$

$$\varphi_3: \{\text{Kanten von } P\} \rightarrow \{\text{Kanten von } \hat{P}\}$$

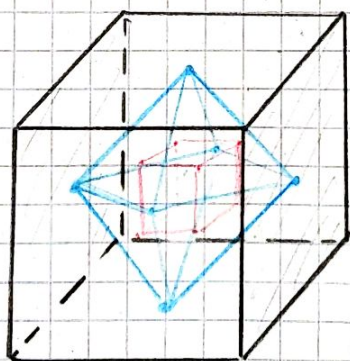
mit:

- sind zwei Ecken u, v von P durch eine Kante k verbunden, so sind auch die Flächen $\varphi_1(u), \varphi_1(v)$ von $\hat{P}$ durch die Kante $\varphi_3(k)$ verbunden.

- sind zwei Flächen u, v von P

Ecken $\varphi_2(u), \varphi_2(v)$ von $\hat{P}$

Insbesondere $\hat{\hat{P}} = P$.



Mittelpunkte der Flächen von 
ergeben Ecken von Oktaeder

6.4 Satz (Eulerscher Polyedersatz): Sei $P \subseteq \mathbb{R}^3$ ein konvexes Polyeder mit e Ecken, f Flächen und k Kanten. Dann gilt: $e - k + f = 2$.

Beweis: Nö.

6.5 Satz: Es gibt genau 5 platonische Körper (d.h. konvexe, reguläre Polyeder).



Theaitetos (400 v. Chr.)

Euklid, Buch XIII (300 v. Chr.)

Beweis: Sei P reguläres, konvexes Polyeder mit e Ecken, f Flächen, k Kanten, die Seiten seien reguläre n -Ecke ($n \geq 3$), an jeder Ecke m Kanten ($m \geq 3$).

Es gilt: 1.) $fn = 2k$ (Kanten zählen)

denn jede Fläche hat n Kanten

2.) $em = 2k$ (Kanten zählen)

Euler

$$\Rightarrow 2 = e - k + f$$

$$= \frac{2k}{m} - k + \frac{2k}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k} = \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{k} > \frac{1}{2} \text{ für welche } m, n \text{ erfüllt?}$$

m	n	reg. Polyeder	$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$
3	3	Tetraeder	ja: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$
3	4	Hexaeder	ja: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} > \frac{1}{2}$
3	5	Dodekaeder	ja: $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15} > \frac{1}{2}$
3	$n \geq 6$	—	nein: $\frac{1}{3} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$
4	3	Oktaeder	ja: $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} > \frac{1}{2}$
4	$n \geq 4$	—	nein: $\frac{1}{4} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$
5	3	Isokaoeder	ja
5	$n \geq 4$	—	nein
$n \geq 6$	$n \geq 3$	—	nein

Also gibt es nur für genau 5 Parameterkonfigurationen reguläre, konvexe Polyeder, nach der Eulerschen Polyederformel.

□

6.6 Bem: Man kann auch Verallgemeinerungen klassifizieren:

Es gibt genau 4 Kepler-Poinsot-Körper (nicht konvex)

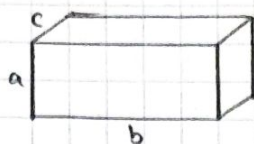
Es gibt genau 13 archimedische und 13 catalanische Körper

(konvex, regelmäßige n -Ecke, nicht notw. kongruent, ...) z.B. der Fußball

Es gibt genau 92 Johnson-Körper (konvex, regelmäßige Vielecke)

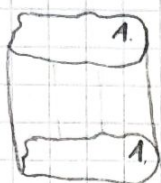
6.7 Prop. Volumen lassen sich wie folgt berechnen:

(a) Quader



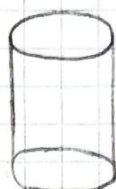
$$V = abc$$

(b) Säule



$$V = Ah$$

↑
Grundfläche

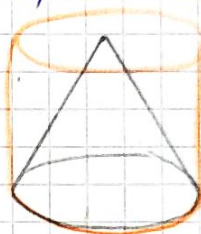


Zylinder

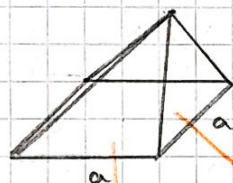
Prinzip von Cavalieri: Zwei Körper mit gleicher Grundfläche und in jeder dazu parallelen Schnittebenen gleich großer Schnittfläche, haben das gleiche Volumen.

→ Beweis (Analysis)

(c) Spitzkörper: Volumen = $\frac{1}{3}$ zugehörige Säule



Beweisbeispiel: Pyramide

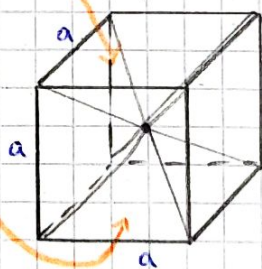


Höhe $\frac{a}{2}$

quadratische Grundfläche

Volumen?

Betrachte Würfel

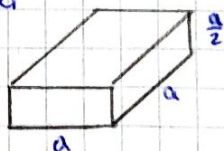


Pyramide passt 6mal in Würfel

→ Volumen der Pyramide

$$= \frac{1}{6} a^3$$

„zugehörige Säule“: Quader



$$V = \frac{1}{2} a^3$$

□

6.8 Bem. Platonische Körper haben größtmögliche Symmetrie. Finde zu je zwei Ecken u und v eine Drehung, so dass u auf v gelegt wird.

→ Punktgruppen

→ Kristallographie (32 Kristallklassen)