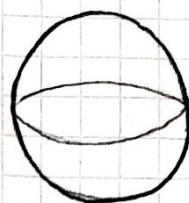


§7 Kugel und Kegel

7.1 Def.: (a) Eine Kugel (auch: Sphäre) mit Radius $r > 0$ ist eine Menge

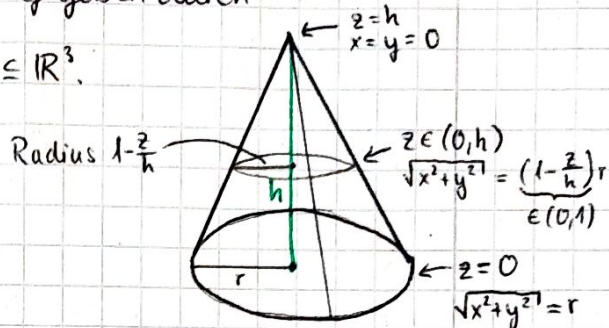
$$K = K_r^3 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

(Beachte: K_r^2 ist ein Kreis, $K_r^1 = \{x \mid \sqrt{x^2} = r\} = \{-r, r\}$)



(b) Ein Kegel (genauer: ein gerader Kreiskegel) ist gegeben durch

$$C_{r,h} := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid z \in [0, h], \sqrt{x^2 + y^2} = \left(1 - \frac{z}{h}\right)r \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$



7.2 Erinnerung (Prinzip von Cavalieri):

Zwei Körper mit gleicher Grundfläche und in jeder dazu parallelen Schnittebene gleich großen Schnittflächen, gilt: Volumen sind gleich.

7.3 Prop.: Gegeben ein Zylinder mit Radius r und Höhe r ,

eine Halbkugel mit Radius r ,

ein Kegel mit Radius r und Höhe r (d.h. $C_{r,r}$).

Dann gilt für die Volumina:

Kegelvolumen : Halbkugelvolumen : Zylindervolumen

1 : 2 : 3

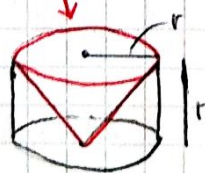
Insbesondere: Kugelvolumen = $\frac{4}{3} \pi r^3$

Beweis: Betrachte Kegel



$$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \pi r^3 \quad (\text{§6}) = \frac{1}{3} \cdot \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}$$

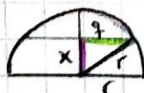
und ausgebohrten Zylinder



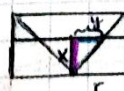
$$V_{\text{Zyl.}} = \pi r^3 = \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}$$

$$\Rightarrow V_{\text{ausgebohrter Zyl.}} = \frac{2}{3} \pi r^3$$

Halbkugel



ausgebohrter Zyl.



Auf Höhe x habe Fläche $A_1(x) = q^2 \pi$, $q^2 = r^2 - x^2$. Auf Höhe x habe Fläche $A_2(x) = r^2 \pi - y^2 \pi$

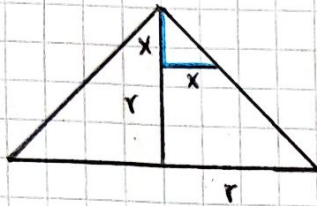
Es gilt für alle x :

$$A_1(x) = \pi r^2 - \pi x^2 = \pi(r^2 - x^2) \stackrel{y=x}{=} \pi(r^2 - y^2) = A_2(x)$$

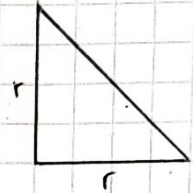
Cavalieri

$$\Rightarrow V_{\text{Halbkugel}} = V_{\text{ausgebohrter Zylinder}}$$

□



immer gleichschenklige Dreiecke

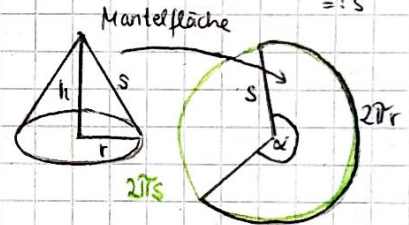


Insbesondere: $V_{\text{Kugel}} = 2 \cdot V_{\text{Halbkugel}} = 2 \cdot V_{\text{ausgebohrter Zyl.}} = 2 \cdot \frac{2}{3} \pi r^3$

7.4 Prop.: Die Oberfläche der Kugel mit Radius r beträgt $4\pi r^2$,

die Mantelfläche des Kegels mit Radius r und Höhe h beträgt $\pi r \sqrt{r^2 + h^2} \stackrel{=: s}{=}$,

die Gesamtoberfläche des Kegels $\pi r(r+s)$.



Beweis:

1) Kugel

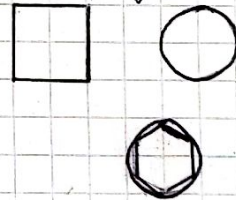
Var. 1 (Analysis): $\text{Vol}(r) = \frac{4}{3} \pi r^3$, $\text{Fläche}(r) = \text{Vol}'(r) = 4\pi r^2$

Var. 2 (geometrisch): per Exhaustion (= Ausschöpfung)

Unterteile dazu die Kugeloberfläche in Gitternetz

(wie auf Globus). Darauf betrachte "Pyramiden" mit Höhe r , der Spitze im Kugelmittelpunkt.

Ausschöpfung:



$$\text{Volumen } V(r) \approx V_1 + \dots + V_N$$

wobei V_i Volumen der Pyramide mit Grundfläche G_i .

$$\text{Also: } V_i = \frac{1}{3} G_i \cdot r$$

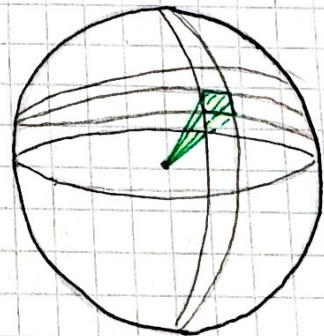
Andererseits Oberfläche der Kugel

$$O(r) \approx G_1 + \dots + G_N$$

$$\Rightarrow V(r) = \sum_{i=1}^N V_i = \frac{1}{3} r \sum_{i=1}^N G_i = \frac{1}{3} r \cdot O(r)$$

$$\stackrel{4}{\frac{4}{3}} \pi r^3$$

$$\Rightarrow O(r) \approx 4\pi r^2$$



2) Kegel

Abgewickelter Mantel hat Sektorfläche $\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{2\pi r}{2\pi s} = \frac{r}{s}$ von dem Kreis mit Radius s , also von πs^2 .

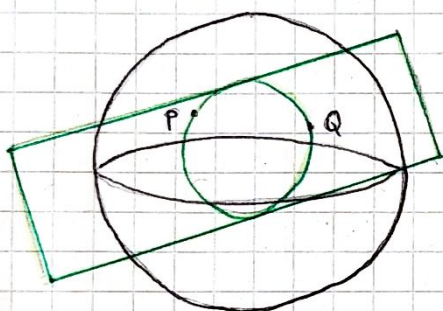
$$\Rightarrow O_{\text{Kegelmantel}}(r, h) = \frac{r}{s} \cdot \pi s^2 = \pi r s.$$

□

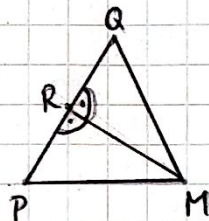
7.5 Lemma: Schneidet man eine Kugeloberfläche mit einer Ebene, so ist die Schnittmenge entweder leer oder ein Punkt oder ein Kreis.

Beweis: Ebene außerhalb oder tangential: $\emptyset$ oder 1 Punkt.

Andernfalls: Habe also mind. 2 Schnittpunkte P, Q . Betrachte Abstand zum



Mittelpunkt M der Kugel.



Verbinde P, Q . Verbinde $\overline{PQ}$ mit M auf kürzestem Weg via $\overline{RM}$.

$$|\overline{PM}| = |\overline{QM}| \xrightarrow{\text{SSW}} |\overline{PR}| = |\overline{QR}|$$

da P, Q auf Kugeloberfläche $\forall P, Q \Rightarrow$ Kreis um R

□

Falls $R=M$: Schnitt heißt Großkreis, Kleinkreis sonst.

§8 Sphärische Geometrie

Euklidische Geometrie:

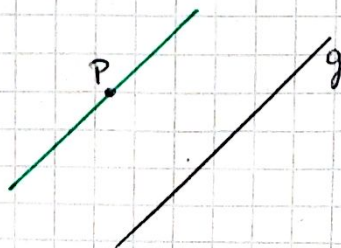
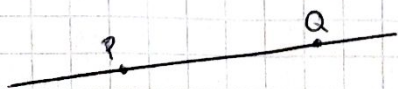
(a) Winkelsumme im Dreieck $= 180^\circ$

(b) Zwei Geraden schneiden sich in max. 1 Punkt.

(c) Es gibt Strecken beliebiger Länge.

(d) Parallelenaxiom: Zu jedem Punkt P der Ebene und jeder Geraden g , so dass P nicht auf g liegt, gibt es genau eine Gerade h durch den Punkt P , die g nicht schneidet.

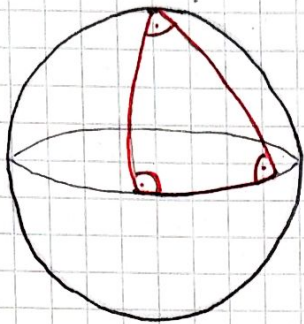
(e) Durch 2 Punkte geht genau eine Gerade.



Nichteuklidische Geometrie: Keine dieser Aussagen wahr.

Idee der sphärischen Geometrie (Teilgebiet der Nichteukl. Geometrie):

Ersetze $\mathbb{R}^2$ durch Kugeloberfläche.



- Dreieck, bei dem alle drei Winkel rechte Winkel sind
- Nordpol und Südpol können durch unendlich viele Geraden auf der Kugeloberfläche verbunden werden.

Quelle für §8: Skript von Filler

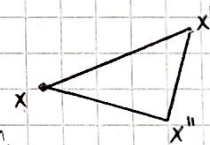
8.1 Def.: Eine Metrik auf einem Raum X ist eine Abbildung $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ mit

(a) $d(x, x') = 0 \iff x = x'$

(b) $d(x, x') = d(x', x)$ (Symmetrie)

(c) $d(x, x') \leq d(x, x'') + d(x'', x')$ (Dreiecksungleichung)

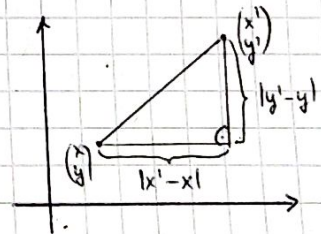
$\forall x, x', x'' \in X$



8.2 Bsp.: Dies liefert einen sinnvollen (abstrakten) Abstandsbegriff:

(a) $X = \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$): $d(x, x') := |x - x'|$

(b) $X = \mathbb{R}^2$ (oder $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$): $d\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) := \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$



8.1 (a) ✓ 8.1 (b) ✓ 8.1 (c) etwas schwieriger