

8.12 Prop.:

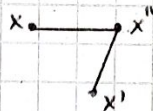
- (a) Die Winkelsumme in einem Dreieck ist in $(180^\circ, 540^\circ]$
- (b) Zwei Geraden schneiden sich immer in genau zwei Punkten.
- (c) Es gibt keine Strecke beliebiger Länge.
- (d) Das Parallelenaxiom ist verletzt: Zu Punkt P und (sphärischer) Gerade gibt es keine Parallele.
- (e) Durch zwei nicht diametrale Punkte geht genau eine Gerade, durch zwei diametrale hingegen gehen unendlich viele Geraden.

8.1 Def.: Eine Metrik $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ erfüllt

(a) $d(x, x') = 0 \iff x = x'$

(b) $d(x, x') = d(x', x)$

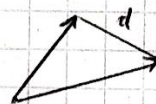
(c) $d(x, x') \leq d(x, x'') + d(x'', x')$



8.2 Bsp.:

(a) $X = \mathbb{R}, d(x, x') = |x - x'|$

(b) $X = \mathbb{R}^n, d\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}\right) := \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + \dots + (x_n - x'_n)^2}$



8.3 Def.: Sei X ein Raum mit einer Metrik d .

(a) Eine Sphäre (Kugeloberfläche) S mit Radius r und Mittelpunkt $x \in X$ ist

$$S := \{x' \in X \mid d(x, x') = r\} \subseteq X$$

(b) Eine Kugel:

$$K := \{x' \in X \mid d(x, x') \leq r\} \subseteq X$$

8.4 Bsp.:

(a) $X = \mathbb{R}, d(x, x') = |x - x'|, x = 0, r = 1$.

$S = \{-1, 1\}$ 1-dim. Kreis, $K = [-1, 1]$ 1-dim. Kugel

(b) $X = \mathbb{R}^2, d$ wie in 8.2(b), $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, r = 1$

$S =$ , $K =$ 

(c) $X = \mathbb{R}^3, d$ wie in 8.2(b)

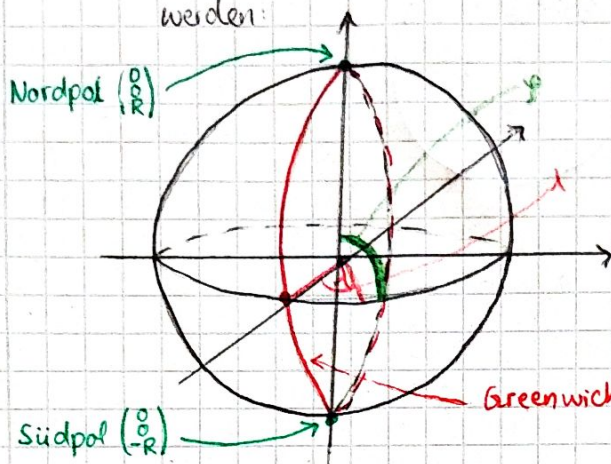
Kugeloberfläche $S =$ 

8.5 Bem.: Wir betrachten im Folgenden den Raum

$$X = S(0, R) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R \right\}$$

also mit $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $R > 0$, $d(x, x') = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2}$.

Ein Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ auf der Kugeloberfläche kann in Kugelkoordinaten ausgedrückt werden:



$$\lambda \in (-180^\circ, 180^\circ] \text{ an } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi \in (-90^\circ, 90^\circ]$$

$$\text{Greenwichlinie} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = 0 \right\} \cap S(0, R)$$

$$\text{Äquator} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid z = 0 \right\} \cap S(0, R) \quad [\text{siehe A1}]$$

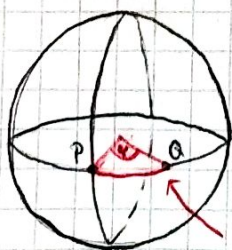
8.6 Def.: Zwei Punkte P und Q auf $X = S(0, R)$ heißen diametral, wenn sie sich auf X gegenüberliegen (z.B. Nordpol und Südpol).

8.7 Lemma:

- (a) Ein Kreis, der ein diametrales Punktepaar enthält, ist ein Großkreis (s. Ende von § 7)
- (b) Zwei diametrale Punkte liegen auf unendlich vielen Großkreisen.
- (c) Durch zwei nicht diametrale Punkte geht genau ein Großkreis. $\rightarrow \ddot{U}$

8.8 Def.:

- (a) Eine sphärische Gerade ist ein Großkreis von X .
- (b) Eine sphärische Strecke ist ein Großkreisbogen (Abschnitt eines Großkreises), die kürzer ist als ein halber Großkreisbogen.
- (c) Der sphärische Abstand ist $d(P, Q) = \begin{cases} \pi R \text{ (oder } 180^\circ), & \text{falls } P, Q \text{ diametral} \\ \text{andernfalls der Abschnitt } \alpha \in [0, 180^\circ) \text{ des} \\ \text{Großkreisabschnitts} \end{cases}$



$$d(P, Q) = \alpha$$

sphärische Strecke

8.10 Bem.: Habe also Begriffe Punkt, Strecke, Abstand in sphär. Geometrie.

8.11 Def.:

(a) Ein (sphärisches) Zweieck ist durch diametrale Punkte P, Q gegeben sowie durch zwei Großkreisbögen a, b .

(b) Ein (sphär.) Dreieck ist durch 3 Punkte und sphär. Strecken dazwischen gegeben.

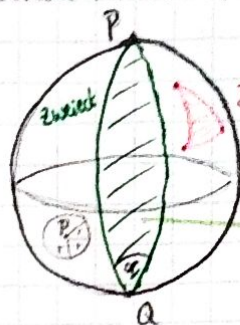
(c) Ein (sphär.) Kreis um $P \in X$ ist gegeben

durch alle Punkte $Q \in X$, die den gleichen (sphär.) Abstand r zu P haben, also

$$S(P, r) = \{Q \mid d(P, Q) = r\}. \text{ wie in 8.3}$$

↑ sphär. Abstand 8.8

(d) Ein Winkel zwischen zwei sphärischen Geraden ist der Winkel zwischen den entsprechenden Großkreisen.



Fläche: $\frac{\omega}{360} \cdot \text{Kugeloberfl.}$

8.12 Prop.: In der sphärischen Geometrie auf $X = S(Q, R)$ gilt:

(a) Die Winkelsumme in einem Dreieck ist in $(180^\circ, 540^\circ]$

(b) Zwei Geraden schneiden sich immer in genau zwei Punkten.

(c) Es gibt keine Strecke beliebiger Länge.

(d) Das Parallelenaxiom ist verletzt: Zu Punkt P und (sphärischer) Gerade gibt es keine Parallele.

(e) Durch zwei nicht diametrale Punkte geht genau eine Gerade, durch zwei diametrale hingegen gehen unendlich viele Geraden.

Beweis:

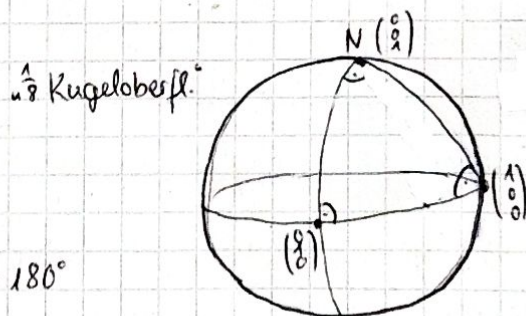
(a) Dreieck mit 3 rechten Winkeln: Summe 270°

sehr kleines Dreieck ist fast wie in $\mathbb{R}^2$: Summe $\approx 180^\circ$

Dreieck mit allen 3 Punkten fast auf Äquator: Summe $\approx 3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$

(b) Schnitt zweier Großkreise

(c) Großkreis = Gerade, maximiert Länge möglicher Strecken



(Beweis:) (d) nach (b): Gegeben Gerade (= Großkreis) + Punkt, nicht auf Großkreis.
Finde Gerade (= Großkreis), die parallel liegt, d.h. die beiden Großkreise dürfen
sich nicht schneiden ($\nrightarrow$ zu (b)).

(e) Ü

□

8.13 Bem.: Es ex. Begriffe wie Kongruenz, Flächeninhalt (hängt von Winkeln ab),
SWS, ...