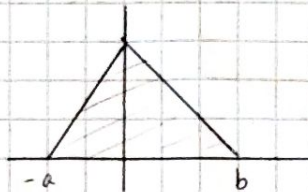


9.8 Motivation: Analysis nützlich für Geometrie



$$\int f(x) dx = \text{Flächeninhalt}$$

Umfang? Längen von Kurven?

9.9 Def.:

(a) $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ (parametrisierte) Kurve in $\mathbb{R}^n$.

(b) γ stetig, falls stetig zwischen $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ und $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$

$$\text{also } \forall t \in [a, b] \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall s \in [a, b]: |s - t| < \delta \Rightarrow \|\gamma(s) - \gamma(t)\| < \varepsilon$$

(c) γ differenzierbar, falls $\forall t \in [a, b] \forall (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq [a, b], t_n \rightarrow t$:

$$\dot{\gamma}(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma(t_n) - \gamma(t)}{t_n - t} \in \mathbb{R}^n \text{ ex. "Geschwindigkeitsvektor"}$$

$$\|\dot{\gamma}(t)\| \text{ "Geschwindigkeit"}$$

(d) γ rektifizierbar, falls

$$L(\gamma) = \sup \{L(P) \mid P \text{ Unterteilung von } [a, b]\} \text{ ex.}$$

$$\text{wobei } L(P) := \sum_{i=1}^k \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \text{ "Länge von } \gamma"$$

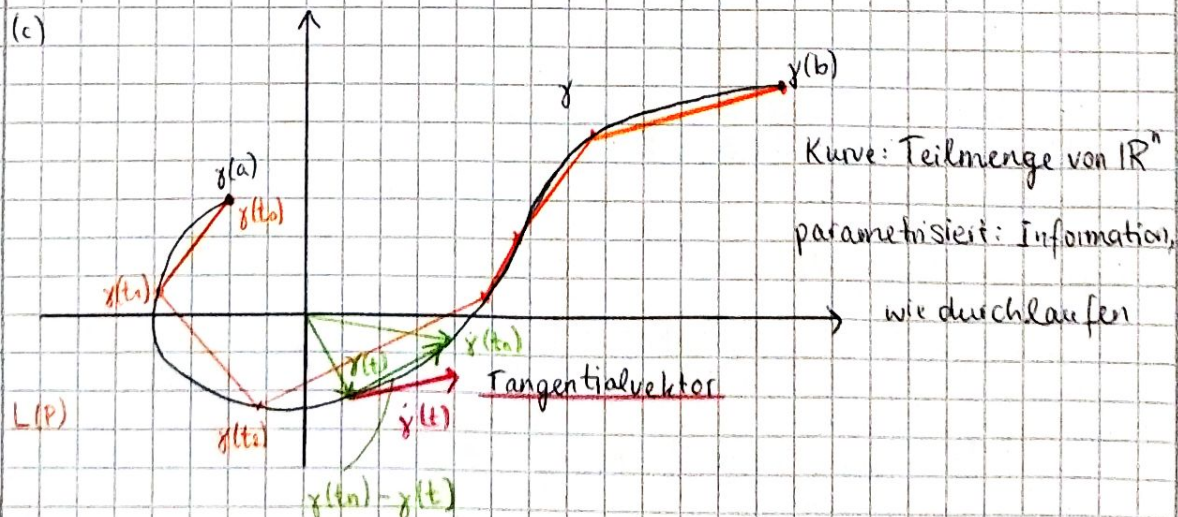
für $P: a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k = b$ Unterteilung

9.10 Bem.:

(a) γ stetig $\Leftrightarrow \gamma_i$ stetig $\forall i = 1, \dots, n, \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n), \gamma_i: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

(b) γ diffbar $\Leftrightarrow \gamma_i$ diffbar $\forall i, \dot{\gamma}(t) = (\dot{\gamma}_1(t), \dots, \dot{\gamma}_n(t))$

(c)



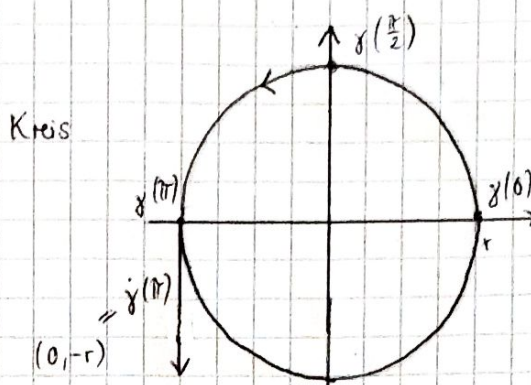
9.11 Bsp:

$$(a) \gamma(t) = (r \cos t, r \sin t), t \in [0, 2\pi]$$

$$\dot{\gamma}(t) = (-r \sin t, r \cos t)$$

$$\|\dot{\gamma}(t)\|_2 = \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} \\ = r$$

Konstante Geschwindigkeit



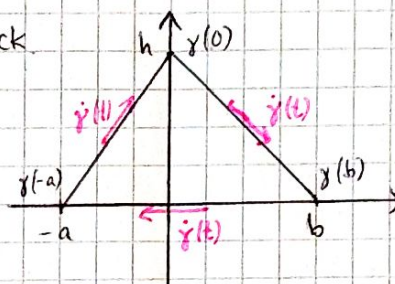
$$(b) \gamma(t) := \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [-a, 0] \\ \gamma_2(t), & t \in [0, b] \\ \gamma_3(t), & t \in [b, 2b+a] \end{cases}$$

$$\gamma_1(t) := (t, \frac{a+b}{a} h), \dot{\gamma}_1(t) = (1, \frac{h}{a})$$

$$\gamma_2(t) := (t, \frac{b-t}{b} h), \dot{\gamma}_2(t) = (1, -\frac{h}{b})$$

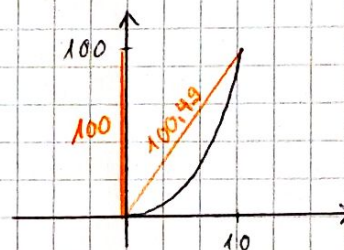
$$\gamma_3(t) := (2b-t, 0), \dot{\gamma}_3(t) = (-1, 0)$$

Dreieck



$$(c) \gamma(t) = (t, t^2), t \in [0, 10]$$

$$\dot{\gamma}(t) = (1, 2t)$$



9.12 Satz: Ist $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig diffbar, so ist γ rektifizierbar und es gilt

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

9.13 Bsp: γ wie in 9.11

$$(a) L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r$$

$$(b) L(\gamma) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2) + L(\gamma_3)$$

$$= \int_{-a}^0 \|\dot{\gamma}_1(t)\| dt + \int_0^b \|\dot{\gamma}_2(t)\| dt + \int_b^{2b+a} \|\dot{\gamma}_3(t)\| dt$$

$$= \int_{-a}^0 \sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2}} dt + \int_0^b \sqrt{1 + \frac{h^2}{b^2}} dt + \int_b^{2b+a} 1 dt$$

$$= a \sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2}} + b \sqrt{1 + \frac{h^2}{b^2}} + (b+a)$$

$$= \sqrt{a^2 + h^2} + \sqrt{b^2 + h^2} + (b+a) \quad \text{Umfang vom Dreieck}$$

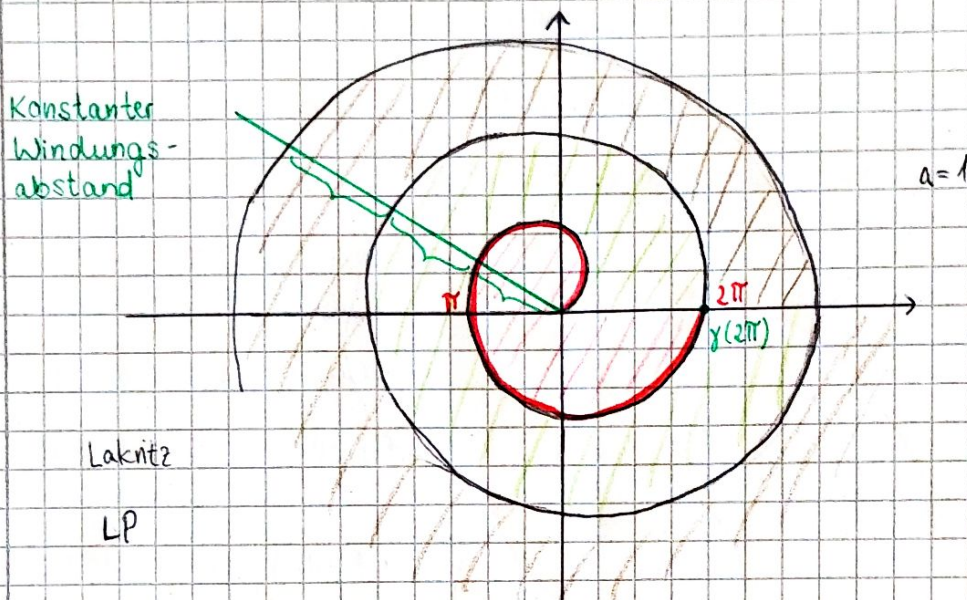
$$(c) L(\gamma) = \int_0^{10} \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_0^{10} \sqrt{1 + (2t)^2} dt = \int_0^{10} \sqrt{1 + 4t^2} dt$$

$$= 2 \cdot \left[\frac{t}{2} \operatorname{arsinh}(2t) + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4t^2} \right]_0^{10} \approx 101,047$$

9.14 Bsp. (archimedische Spirale):

$$(1) \gamma: [0, N] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (at \cos t, at \sin t), a > 0$$

also „ $r = at$ “, d.h. Radius wächst proportional zur Drehung.



$$\dot{\gamma}(t) = (a \cos t - at \sin t, a \sin t + at \cos t)$$

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{(a \cos t - at \sin t)^2 + (a \sin t + at \cos t)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 \cos^2 t - 2ats \sin t \cos t + a^2 t^2 \sin^2 t + a^2 \sin^2 t + 2ats \sin t \cos t + a^2 t^2 \cos^2 t}$$

$$= \sqrt{a^2 + a^2 t^2}$$

$$= a \sqrt{1 + t^2}$$

$$L(\gamma) = \int_0^N \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \frac{a}{2} \left[\operatorname{arsinh}(t) + t \sqrt{1 + t^2} \right]_0^N$$

Länge einer Drehung? $L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\dot{\gamma}(t)\| dt \approx 21,25 \cdot a$

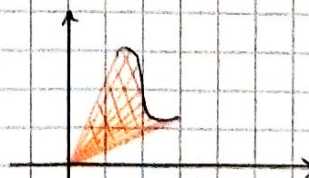


(2) Fläche nach einer Drehung?

Leibniz Sektorformel: $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (x(t), y(t))$ stetig diffbar, $\dot{\gamma}(t) \neq 0 \forall t$

Dann ist die Fahnstrahlfläche gegeben durch

$$F(\gamma) = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)y'(t) - x'(t)y(t)) dt$$



Für arch. Spirale:

$$F(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (at \cos t \cdot (as \sin t + at \cos t) - at \sin t (a \cos t - at \sin t)) dt$$

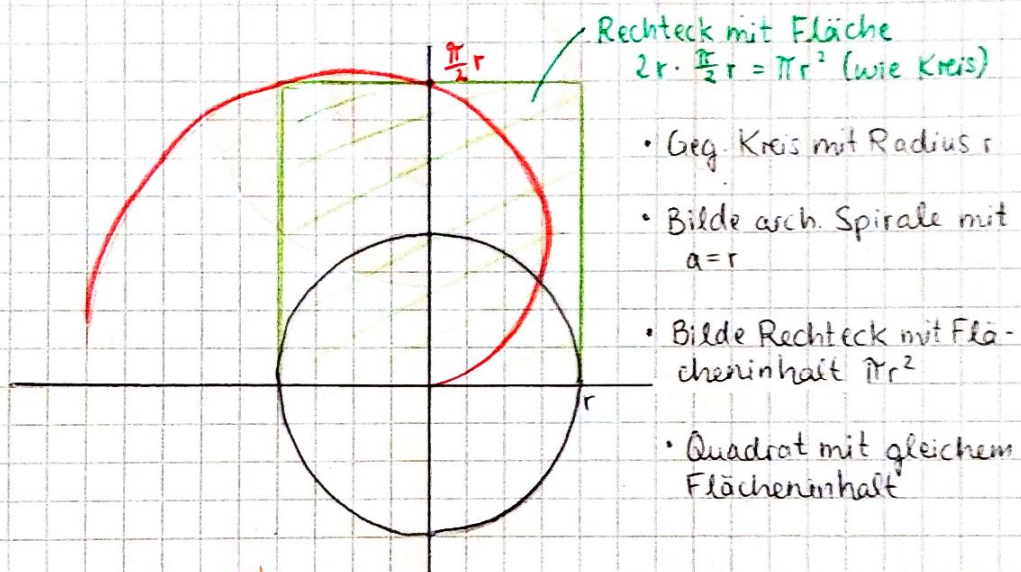
$$= \frac{1}{2} a^2 \int_0^{2\pi} t^2 dt = \frac{1}{2} a^2 \frac{1}{3} t^3 \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{6} a^2 (2\pi)^3 - 0 = \frac{4}{3} a^2 \pi^3$$

$A_1 = 6 \cdot A_2$, $A_2 : A_3 : A_4 : A_5 : A_6$
 $1 : 2 : 3 : 4 : 5$

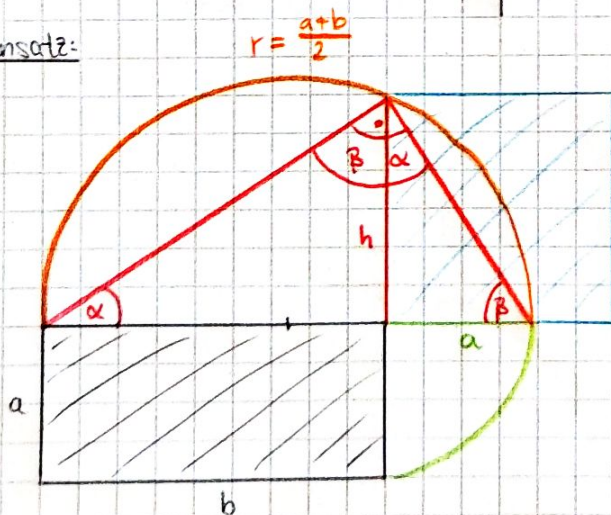
(8) Quadratur des Kreises in klass. Geometrie nicht lösbar.

(Es ist nicht möglich nur mit Zirkel und Lineal zu einem gegebenen Kreis ein Quadrat zu konstruieren mit gleichem Flächeninhalt.)

Aber mit archimedischer Spirale ist es lösbar!



Höhensatz:



Ähnlichkeit: $\frac{h}{a} = \frac{b}{h}$

$\Leftrightarrow ab = h^2$