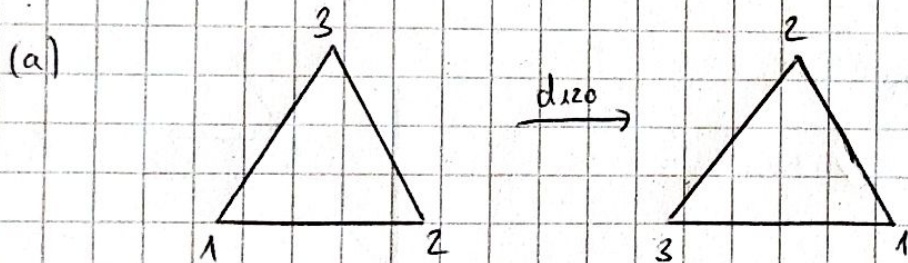


§10 Graphentheorie

10.1 Motivation:



Permutation



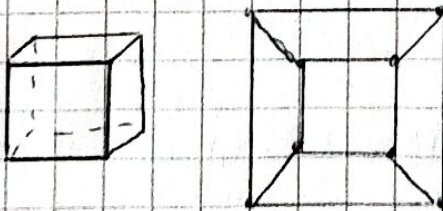
nur Punkte relevant

(b) platonische Körper, Symmetrien

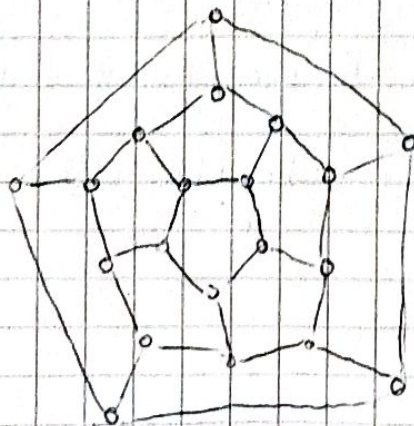
Tetraeder



Oktaeder

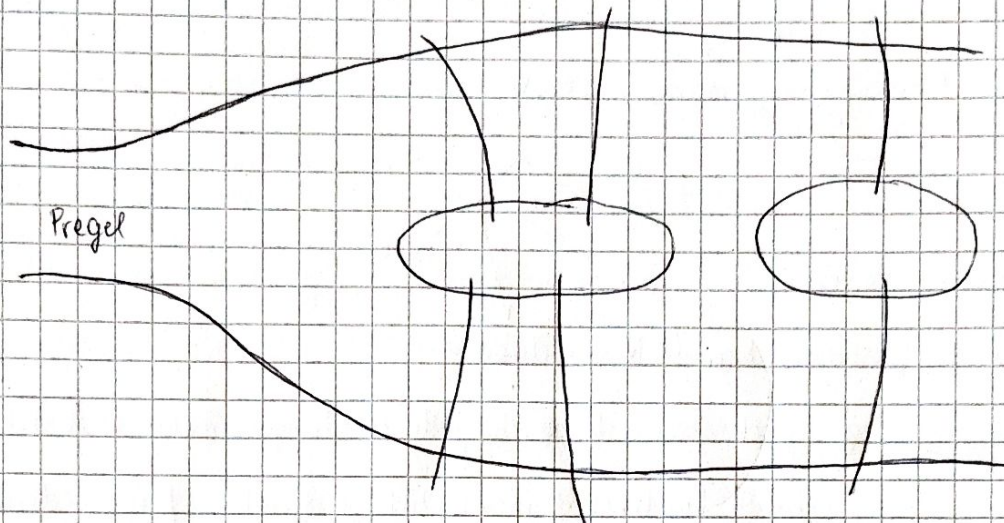


Dodekaeder

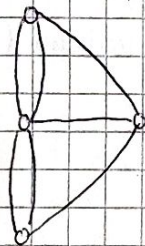


(c) Graphen: Straßennetze, Logistik, chem. Moleküle, Netzwerke/WLAN, soziale Beziehungen (Erdős-Zahl)

Historisch: Euler 1736 Königsberger Brückenproblem

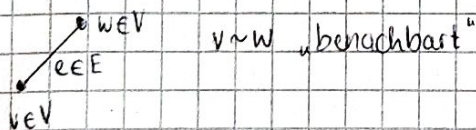


Gibt es einen Weg, bei dem man alle 7 Brücken genau einmal überquert?



10.2 Def.:

(a) $\Gamma = (V, E)$ Graph
 $\uparrow \quad \nwarrow$ Knoten/Ecken/Vertices Kanten/Edges



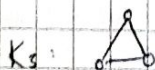
(b) Schleife/Loop: 

(c) Mehrfachkanten: 

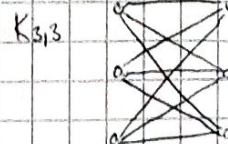
(d) Grad eines Knoten $d(v)$:  $d(v) = 3$

10.3 Bsp.:

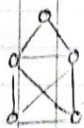
(a) vollständiger Graph: K_2 : 



(b) bipartiter Graph:



(c)



(d)



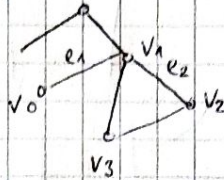
10.4 Def:

(a) Weg: Folge $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k$

Länge: k

geschlossen: $v_0 = v_k$

Zykel: geschlossener Weg, alle v_i verschieden



(b) Eulerischer Weg: geschlossener Weg, der jede Kante genau einmal durchläuft (Vertizes dürfen mehrfach durchlaufen werden)

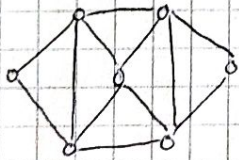
Eulerischer Graph: Γ hat E. Weg

(c) Hamiltonweg: jeder Vertex genau einmal durchlaufen (geschlossen)

(d) Γ zusammenhängend: $\forall v, w \in V \exists$ Weg, der v, w verbindet

10.6 Bsp:

(a)



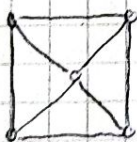
Euler & Hamilton

(b)



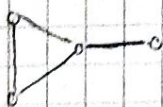
E, nicht H

(c)



nicht E, H

(d)



nicht E, nicht H

10.7 Satz (Euler 1736/1873): Γ zusammenhängend

Γ Eulergraph $\Leftrightarrow$ alle Vertizes haben geraden Grad.

Beweis:

$\Rightarrow$: klar (gehe zu Vertex hin, verlasse Vertex: 2 Kanten genutzt)

$\Leftarrow$: klar für $|E| = 2$, also 

1.) Starte irgendwo, wähle freie Kante.

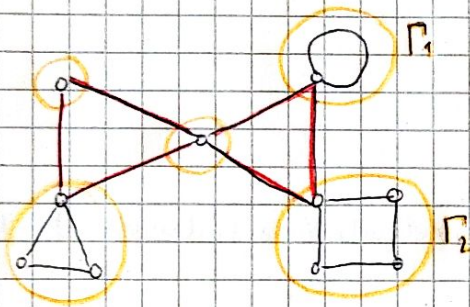
Muss am Ende am Ausgangspunkt angekommen sein (da alle Vertices geraden Grad)

$\leadsto$ Erhalte geschlossenen Weg.
(der vielleicht nicht alle Kanten durchläuft)

2.) Entferne den Weg aus $\Gamma \leadsto$ erhalte $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ zush.

3.) Nach I. vor. finde für jeden Graphen Γ_i einen Eulerweg

4.) Zusammenkleben. □



10.7 Korollar: Der 7-Brückengraph ist kein Eulergraph.

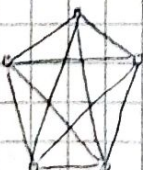


10.8 Def: Γ planar: $\Leftrightarrow \Gamma$ kann ohne Kreuzungen gezeichnet werden

10.9 Bsp.:

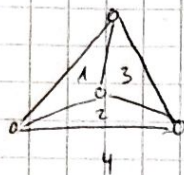
(a)  planar

(b)  planar, denn: 

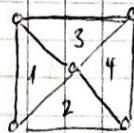
(c) K_5 :  nicht planar

10.10 Satz (Euler 1758): Γ zush., planar, $|V| = n$, $|E| = e$, f Flächen.

Dann gilt: $n - e + f = 2$ (Polyederformel (6.5): Ecken - Kanten + Flächen = 2).



4 Flächen



5 Flächen

Beweis:

1.) $n=1$:

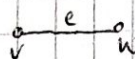


$$e=0$$

$$1-0+1=2$$

$$e \rightarrow e+1 \text{ Dann } f \rightarrow f+1 \checkmark$$

2.) $n=1 \rightarrow n$ Γ zush. $\Rightarrow \exists$ Kante, die keine Schleife ist



Γ' durch Kontraktion dieser Kante

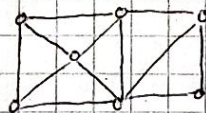
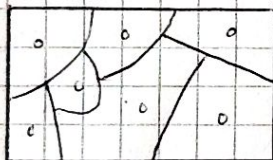
Γ' planar, zush., $n'=n-1$, $e'=e-1$, $f'=f$

$$n-e+f = n'-e'+f' \stackrel{\text{I. Vor.}}{=} 2$$

$\square$

10.12 Vierfarbensatz:

Wie viele Farben c benötigt man, um eine Landkarte so zu färben, dass Nachbarländer verschiedene Farben haben?



planarer Graph

Will Vertices färben, so dass $v \sim w \Rightarrow v, w$ versch. Farben



$$\Rightarrow c \geq 4$$

1852 Problem gestellt (Guthrie)

1878 Cayley auf London Math Society meeting

1879 „Beweis“ von Kempe

1890 Heawood: Kempe falsch, $c \leq 5$

1976 Appel-Haken: $c \leq 4$ Computerbeweis