UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Moritz Weber
Nicolas Faroß

Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure 4a
Sommersemester 2024

Erstes Übungsblatt
Abgabe Montag, 23.04.

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.**
Die von Null verschiedene Lösung $\widetilde{x}$ der Gleichung

$$\ln(1-x) + 2x = 0 \quad (x < 1)$$

soll durch eine Fixpunktiteration approximiert werden.

(a) Transformieren Sie die Gleichung durch Äquivalenzumformungen in eine Fixpunktgleichung $f(x) = x$.

(b) Beweisen Sie die Konvergenz der Fixpunktiteration $x_{n+1} = f(x_n)$ gegen $\widetilde{x} \in M = [0.7, 0.9]$ für alle Startwerte $x_0 \in M$, indem Sie alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes überprüfen.
Hinweis: Falls Sie die Konvergenz nicht beweisen können überlegen Sie, ob eine andere Darstellung von f in Aufgabenteil (i) sinnvoll ist.

(c) Berechnen Sie, wie viele Schritte $n \in \mathbb{N}$ a priori nötig sind, um ausgehend vom Startwert $x_0 = 0.7$ einen Fehler $|x_n - \widetilde{x}| < 10^{-4}$ zu garantieren.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.**
Sei $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ eine reelle $N \times N$ Matrix. Dann ist die Zeilensummennorm von A definiert durch

$$\|A\|_Z := \max(\sum_{i=1}^{N} |a_{ik}|;\ i = 1, \dots N).$$

Gegeben sei das nicht-lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{1+y^2} \\ \frac{1}{4}(\sin(x) + \sin(y)) \end{pmatrix}$$

in $M = [-1, 0] \times [-1, 0]$. Zeigen Sie mithilfe des Banchschen Fixpunktsatzes, dass dieses Gleichungssystem genau eine Lösung in M hat. Weisen Sie dabei die Kontraktion bezüglich der Zeilensummennorm nach.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.**

(a) Es seien eine Folge $\{\underline{\mathbf{x}}^{(k)}\}$ in $\mathbb{R}^n$ und $\underline{\mathbf{x}}^* \in \mathbb{R}^n$ gegeben mit

$$\underline{\mathbf{x}}^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{x}}^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\{\underline{\mathbf{x}}^{(k)}\}$ genau dann gegen $\underline{\mathbf{x}}^*$ konvergiert, wenn

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i^*$$

für alle $i = 1, \dots, n$ gilt.

(b) Es sei $\{\underline{\mathbf{x}}^{(k)}\}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die Folge $\{\|\underline{\mathbf{x}}^{(k)}\|\}$ eine konvergente reelle Zahlenfolge ist. Gilt die Umkehrung?

Hinweis: Zeigen (und benutzen) Sie die umgekehrte Dreiecksungleichung $|\|\underline{\mathbf{x}}\| - \|\underline{\mathbf{y}}\|| \leq \|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}\|$ für alle $\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.**
Es seien $D \subset \mathbb{R}$ und $\Phi\colon D \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\Phi(x) = x^2$.

(a) Bestimmen Sie alle Fixpunkte von Φ im Fall $D = \mathbb{R}$.

(b) Damit wir den Banachschen Fixpunktsatz anwenden können müssen die folgenden drei Bedingungen erfüllt sein:

- Die Menge D ist abgeschlossen.
- Es gilt $\Phi(D) \subset D$.
- Φ ist eine Kontraktion, d.h. es gibt $C \in [0, 1)$ so, dass

  $$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq C|x - y|$$

  für alle $x, y \in D$.

Überprüfen Sie in den folgenden Fällen, welche der obigen Voraussetzungen erfüllt sind und welche nicht.

(i) $D = (0, \frac{1}{4})$ (ii) $D = [\frac{1}{8}, \frac{1}{4}]$ (iii) $D = [0, 1]$