UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Moritz Weber
Nicolas Faroß

Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure 4a
Sommersemester 2024

Zweites Übungsblatt
Abgabe Dienstag, 07.05.

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.**

(a) Formulieren Sie das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Lösung der Gleichung $x^q = a$, wobei $q > 1$ und $a > 0$ gilt.

(b) Berechnen Sie die ersten vier Iterationsschritte zur Approximation von $\sqrt[3]{5}$ ausgehend vom Startwert $x_0 = 5$. Vergleichen Sie den Wert x_4 mit dem exakten Wert von $\sqrt[3]{5}$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.**
Die Schnittpunkte der Ellipse

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

mit dem Kreis

$$x^2 + y^2 = 9$$

sollen numerisch bestimmt werden.

(a) Geben Sie das zugehörige Nullstellenproblem $f((x,y)) = (0,0)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, mit einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an.

(b) Berechnen Sie einen Schritt des Newton-Verfahrens zur Lösung des in (i) aufgestellten Nullstellenproblems. Wählen Sie als Startwert $(x_0, y_0) = (2,2) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Beurteilen Sie die Qualität des in (b) berechneten Iterationspunktes $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ anhand einer Zeichnung.

(d) Überprüfen Sie, ob der Startwert $(x_0, y_0) = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ zum Auffinden einer Nullstelle der Funktion f mit dem Newton-Verfahren geeignet ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.**
Betrachten Sie die Polynome

$$f(x) = \frac{1}{10}x^3 - \frac{1}{2}x, \qquad g(x) = x^4 - 2x^3 + 2x.$$

(a) Führen Sie 5 Schritte der Newton-Iteration und der Fixpunkt-Iteration (nach Banach) für f mit den Startwerten $x_0 \in \{0.99, 1.0, 1.01\}$ durch.

(b) Führen Sie 5 Schritte der Newton Iteration und der Fixpunkt Iteration (nach Banach) für g mit den Startwerten $x_0 \in \{0.5, 0.01\}$ durch.

Geben Sie jeweils alle Werte mit einer Genauigkeit von mindestens 5 Nachkommastellen an.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.**
Geben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = (x-1)^2 + y^2 + \frac{x}{\pi}\sin(\pi y)$$

(a) Geben Sie die notwendige Bedingung für die Existenz lokaler Extrema der gegebenen Funktion f an.

(b) Geben Sie die Iterationsgleichung für das Newton-Verfahren zur Bestimmung kritischer Punkte von f an.

(c) Führen Sie ausgehend vom Startwert $(x_0, y_0) = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$ einen Schritt des Newton-Verfahrens aus.