UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Moritz Weber
Nicolas Faroß

Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure 4a

Sommersemester 2024

Drittes Übungsblatt

Abgabe Dienstag, 21.05.

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.**
Es sei die 3×3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie für die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ die Normen

(a) $\|A\|_1$

(b) $\|A\|_2$

(c) $\|A\|_\infty$

(d) $\|A\|_F$

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.**

(a) Zeigen Sie: Konvergiert das Jacobi-Verfahren für ein Gleichungssystem mit Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für jeden Startvektor, so konvergiert es auch für jedes Gleichungssystem mit der transponierten Koeffizientenmatrix $A^t \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(b) Führen Sie zwei Schritte des Jacobi-Verfahrens für das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$$

durch, ausgehend vom Startvektor $x_0 = (0, 0, 0)^t \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.**
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$ und $\omega \in \mathbb{R}$.

(a) Betrachte das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$. Es bezeichne $e_k := x_k - x \in \mathbb{R}^n$ den Fehlervektor nach der k-ten Iteration des *Richardson-Verfahrens*

$$x_{k+1} = x_k - \omega(A \cdot x_k - b), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Zeigen Sie, dass

$$r\left((I - \omega A)^k\right) = \left(r\left(I - \omega A\right)\right)^k$$

und folgern Sie die Fehlerabschätzung:

$$\|e_k\|_2 \leq r\left((I-\omega A)^k\right)\|e_0\|_2.$$

Dabei bezeichnet $r\left((I-\omega A)^k\right)$ den Spektralradius der Matrix $(I-\omega A)^k$ für $k \in \mathbb{N}$. Wann konvergiert das Verfahren?

(b) Führen Sie für das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

zwei Schritte des Richardson-Verfahren mit $\omega = 0,4$ durch. Wählen Sie als Startvektor den Vektor $x_0 = (0,0,0)^t \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.**
Hinweis: Die Begriffe (strikt/schwach) diagonal dominant und irreduzibel sowie der Satz über die Konvergenz des Jacobi-Verfahrens werden in der Vorlesung am 14.05. eingeführt.

Prüfen, Sie ob die folgenden Matrizen $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(i = 1,2)$ strikt diagonal dominant, schwach diagonal dominant oder irreduzibel sind. Auf welche der Matrizen ist der Satz über die Konvergenz des Jacobi-Verfahrens anwendbar?

$$\text{(i)} \quad A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

und

$$\text{(ii)} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 8 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$$