SoSe 2024
Moritz Weber
16.4.2024

HMI 4a

Literatur: Bärwolff, Numerik für Ingenieure, Physiker & Informatiker, Kap 7–9

Motivation: Numerik

- Berechnung von Integralen, lin./nichtlin. GLS, gew./part. DGL
  "Entwicklung, Analyse und Implementierung von Algorithmen zur Lösung math. Fragestellungen"
- viel im Alltag eingesetzt
- Ziel: wo keine exakten Lösungsverfahren bekannt sind oder zu aufwändig:
  Näherung liefern
- math.: Konstruktion & Implementierung von Alg., Konvergenzgeschw., Fehleranalyse
  Unterschied zwischen exakten und Näherungsverfahren
- praxis: Lsg. tauglich? Verbesserung bestehender Lsgen?
- Ziele der Vorl.: Verfahren kennenlernen (Wikipedia: Liste numerischer Verfahren)
  vornehmlich Näherungen
  Nichtlin. GLS, Banachscher Fixpunktsatz, Newtonverfahren,
  iterative Löser für Lin. GLS, numerische Lsgn für gew./part. DGL

1 Iterative Verfahren zur Lösung von Gleichungen

§ 1.1 Banachscher Fixpunktsatz

Sei $f: D \to \mathbb{R}^m$ eine Fkt., $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Will Gleichung lösen:

$$f(x) = b$$

Suche also $x \in D$, $b \in \mathbb{R}^m$ gegeben (typischerweise $b = 0$, mit $g(x) := f(x) - b$ ist $g(x) = 0 \iff f(x) = b$)

großer Unterschied: f linear oder nicht?

(d.h. $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x, y \in D$)

linear ⇝ muss also $Ax = b$ lösen, $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$

(HMI 2: LGLS, z.B. mit Gaußschem Eliminierungsverfahren)

nicht linear: schwieriger! suche iteratives Verfahren, also Näherung

wichtig: f stetig. Suche $(x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ mit $f(x_n) \to b$ und $x_n \to x$

1.1 Bsp.: a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x + \frac{1}{5}$ Polynom

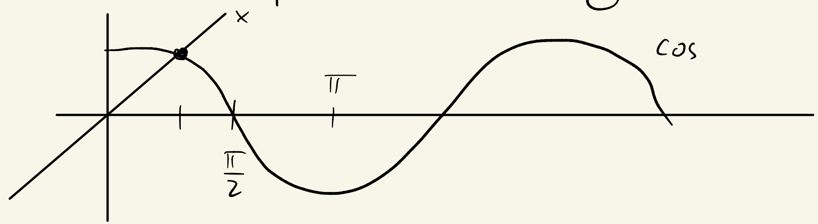
Suche Nullstelle, also $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$.

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x) - x$

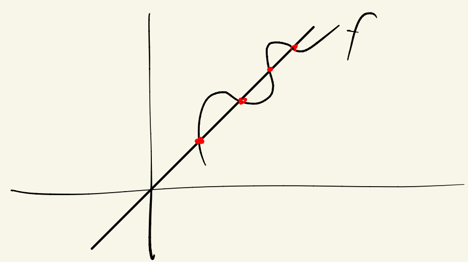
Suche Nullstelle. $f(x) = 0 \iff \cos(x) = x$

Suche also Fixpunkt der Funktion $g(x) := \cos(x)$

Nullstelle $\overset{?}{\iff}$ Fixpunkt



1.2 Def.: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: D \to D$. Eine Lösung $x \in D$ der <u>Fixpunktgleichung</u> $f(x) = x$ heißt <u>Fixpunkt</u>.



es kann mehrere geben

Übrigens kann man auch Gleichungen der Form

$$f(x) = b$$

als Fixpktgl. schreiben: $\quad g(x) := f(x) + x - b$.

Dann $\quad g(x) = x$

$$\iff f(x) + x - b = x$$

$$\iff f(x) = b$$

Wie findet man nun einen Fixpunkt?

Idee: $\quad x_0 \in D$. $\quad x_{n+1} := f(x_n) = f\left(f\left(x_{n-1}\right)\right)$

n+1 mal komponiert

$$= f(f(\ldots f(x_0) \ldots)) = f^{(n+1)}(x_0)$$

Ist jetzt f stetig und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent mit $x := \lim_{n\to\infty} x_n$, so ist

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x_0) = \lim_{n\to\infty} f^{(n+1)}(x_0) = \lim_{n\to\infty} f\Big(\underbrace{f^{(n)}(x_0)}_{x_n}\Big) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

$$\underset{f \text{ stetig}}{=} f\left(\lim x_n\right) = f(x)$$

$\Rightarrow$ x ist Fixpkt.

cos

x_0	0,5	0	
x_1	0,877582561890373	1	$= \cos(x_0)$
x_2	0,639012494165259	0,54030230586814	$= \cos(x_1)$
x_3	0,802685100682335	0,857553215846393	
x_4	0,694778026788006	0,654289790497779	
x_5	0,768195831282016	0,793480358742566	
x_6	0,719165445942419	0,701368773622756	
x_7	0,752355759421527	0,763959682900655	
x_8	0,730081063137823	0,722102425026707	
x_9	0,74512034135144	0,750417761763761	
x_10	0,735006309014843	0,73140404242251	
x_11	0,741826522643246	0,744237354900557	
x_12	0,737235725442231	0,735604740436347	
x_13	0,740329651878263	0,741425086610109	
x_14	0,738246238332234	0,737506890513243	
	〃	//	
	0,73...		

$\rightsquigarrow$ Fixpkt. der Gleichg $\cos(x) = x$

$x = 0{,}73\ldots$

1.5 Def: a) Ein <u>Iterationsverfahren</u> (<u>iteratives Verfahren</u>) ist eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ zusammen mit einer Vorschrift $\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ („<u>Verfahrensfunktion</u>"), so dass $x_{n+1} = \Phi(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, mit <u>Anfangswert</u> $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

b) Ein Iterationsverfahren heißt <u>konvergent</u>, falls die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, mit Grenzwert $\bar{x}$. Es heißt konvergent <u>von der Ordnung</u> $p \in \mathbb{N}$, falls es ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $C > 0$ gibt mit

$$\|x_{n+1} - \bar{x}\| \leq C \, \|x_n - \bar{x}\|^p \qquad \forall n \geq N$$

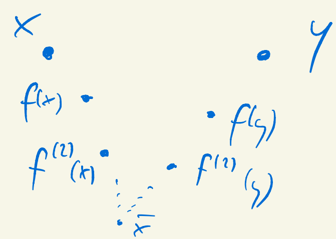
Für $p = 1$ muss $C < 1$ sein.

1.6 Def: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$. f heißt <u>kontrahierend</u> (oder <u>Kontraktion</u>), falls

(i) $f(D) \subseteq D$

(ii) und es ein $0 < C < 1$ gibt mit $\|f(x) - f(y)\| \leq C \, \|x - y\| \quad \forall x, y \in D$

in $\mathbb{R}^2$:



1.7 Satz (Banachscher Fixpunktsatz): Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, $f: D \to \mathbb{R}^n$ eine Kontraktion.

Dann gilt:

(a) f besitzt einen Fixpunkt $\bar{x} \in D$ und dieser ist eindeutig.

(b) Für jeden Startwert $x_0 \in D$ konvergiert die Fixpunktiteration $x_{n+1} = f(x_n)$ (d.h. $\Phi(x) := f(x)$ als Iterationsverfahren) gegen den Fixpkt $\bar{x}$ mit der Ordnung $p = 1$.

(c) Es gilt die a priori Fehlerabschätzung $\| x_n - \bar{x} \| \leq \frac{c^n}{1-c} \| x_1 - x_0 \|$

und die a posteriori Fehlerabschätzung $\| x_n - \bar{x} \| \leq \frac{1}{1-c} \| x_n - x_{n-1} \|$

kann vor Beginn des Verfahrens genutzt werden um $n \in \mathbb{N}$ zu ermitteln, so dass x_n nah genug an $\bar{x}$ liegt

kann nach Abschluss des Verfahrens (oder währenddessen) ...

<u>Bew:</u> Ex.: $\|x_{n+1} - x_n\| = \|f(x_n) - f(x_{n-1})\| \overset{f \text{ Kontr.}}{\leq} C\|x_n - x_{n-1}\| \overset{\dots}{\leq} C^n \|x_1 - x_0\|$

für $n < m$ gilt: $\|x_m - x_n\| \overset{\Delta\text{-Ugl.}}{\leq} \|x_m - x_{m-1}\| + \|x_{m-1} - x_{m-2}\| + \dots + \|x_{n+1} - x_n\|$

$$\leq (C^{m-1} + C^{m-2} + \dots + C^n)\|x_1 - x_0\|$$

$$= C^n \left(\sum_{k=0}^{m-n-1} C^k\right)\|x_1 - x_0\|$$

$$\leq C^n \left(\sum_{k=0}^{\infty} C^k\right)\|x_1 - x_0\|$$

geom. Reihe $0 < C < 1$ $\quad \overset{\curvearrowright}{=} C^n\left(\frac{1}{1-C}\right)\|x_1 - x_0\| \quad \forall m \in \mathbb{N}$

Da $C^n\left(\frac{1}{1-C}\right)\|x_1 - x_0\| \longrightarrow 0$ für $n \to \infty$, ist $\|x_m - x_n\|$ bel. klein für alle $m > n \geq N$

$\Longrightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge, sei $\bar{x} := \lim_{n\to\infty} x_n$ der Grenzwert

Dann $\|f(\bar{x}) - \bar{x}\| \overset{\Delta\text{-Ugl.}}{\leq} \|f(\bar{x}) - \underset{f(x_{n-1})}{\underset{\shortparallel}{x_n}}\| + \|x_n - \bar{x}\| \leq C\underbrace{\|\bar{x} - x_{n-1}\|}_{\to 0} + \underbrace{\|x_n - \bar{x}\|}_{\to 0}$

$\Longrightarrow \|f(\bar{x}) - \bar{x}\| = 0$, d.h. $\bar{x}$ ist Fixpkt.

Eind.: Sei x' mit $f(x') = x'$. Dann $\|x' - \bar{x}\| = \|f(x') - f(\bar{x})\| \leq C\|x' - \bar{x}\| \overset{C<1}{<} \|x' - \bar{x}\|$ falls $\|x' - \bar{x}\| \neq 0$ dann ↯

$\Longrightarrow x' = \bar{x}$

Ordnung: $\|x_{n+1} - \bar{x}\| = \|f(x_n) - f(\bar{x})\| \leq C\|x_n - \bar{x}\| = C\|x_n - \bar{x}\|^p$, $p = 1$.

$\square$

Wdh.: 1.6 Kontraktion: $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}^n$, f Kontraktion, falls

(i) $f(D) \subseteq D$

(ii) $\exists\, 0 < C < 1$: $\|f(x) - f(y)\| \leq C \|x - y\| \quad \forall x,y \in D$

$\uparrow$ irgendeine Norm (meist Euklidische)

1.7 Fixpktsatz: $D \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschl., $f: D \to \mathbb{R}^n$ Kontraktion

$\Rightarrow \quad \exists!\, \bar{x} \in D$ mit $f(\bar{x}) = \bar{x} = \lim x_n$, $x_{n+1} := f(x_n)$, $x_0 \in D$ bel.

& a priori / a posteriori Fehlerabschätzung

Wann gibt es nun eine Kontraktion?

1.8 <u>Mittelwertsatz:</u> $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, auf (a,b) diffbar (oder $f \in C^1[a,b]$).

Dann ex. $\xi \in (a,b)$ mit $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$

$\hookrightarrow$ <u>1.9 Korollar:</u> f wie in 1.8, $C := \max_{\xi \in [a,b]} |f'(\xi)| < 1 \Rightarrow f$ kontrahierend

<u>Bew.:</u> Seien $x,y \in [a,b]$. Dann erfüllt $f|_{[x,y]}: [x,y] \to \mathbb{R}$ die Vor. von Satz 1.8

$\overset{1.8}{\Longrightarrow} \exists\, \xi_{x,y} \in (x,y) \subseteq [a,b]$ mit $f(y) - f(x) = f'(\xi_{x,y})(y-x)$

$\Rightarrow \quad |f(y) - f(x)| \leq |f'(\xi_{x,y})|\,|y-x| \leq C\,|y-x|$ $\square$

1.10 Bsp.: a) Suche Nullstelle von $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = \frac{1}{4}x^3 - x + \frac{1}{5}$

Teste: $p(0) = \frac{1}{5} > 0$, $p(1) = \frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{5} < 0$ $\Rightarrow$ auf $[0,1]$ liegt eine Nullstelle

Setze $f(x) := \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{5} = p(x) + x$, $f: [0,1] \to \mathbb{R}$

Dann x Fixpkt von f (d.h. $f(x) = x$) $\overset{\text{„}D\text{"}}{\Longleftrightarrow}$ $p(x) = 0$

Vor. von B. Fixpktsatz?
- D abgeschl. ✓
- $f([0,1]) \subseteq [0,1]$
- f Kontr.? nutze 1.9

f ist diffb. auf $[0,1]$, $f'(x) = \frac{3}{4}x^2$ und $C := \max\limits_{\xi \in [0,1]} |f'(\xi)| = \frac{3}{4} < 1$

$\overset{1.9}{\Longrightarrow}$ f Kontraktion $\overset{1.7}{\Longrightarrow}$ f besitzt genau einen Fixpunkt auf $[0,1]$

Wo liegt es? $x_{n+1} = f(x_n)$ wähle verschiedene $x_0 \in [0,1]$

		p(x)
x_0	0,5	-0,26875
x_1	0,23125	-0,02815838623046
x_2	0,203091613769531	-0,00099742425762
x_3	0,202094189511911	-0,00003070368601
x_4	0,202063485825899	-0,00000094035849
x_5	0,202062545467407	-0,0000002879574

		p(x)
x_0	0,1	0,10025
x_1	0,20025	0,00175750937890
x_2	0,202007509378906	0,00005332243915
x_3	0,202060831818066	0,00000163237874
x_4	0,202062464196812	0,00000004998618
x_5	0,202062514182995	0,00000000153067

		p(x)
x_0	0,2	0,002
x_1	0,202	0,00006060199999
x_2	0,202060602	0,00000185515946
x_3	0,202062457159461	0,00000005680803
x_4	0,202062513967498	0,00000000173957
x_5	0,20206251570707	0,00000000005326

		p(x)
x_0	1	-0,55
x_1	0,45	-0,22721875
x_2	0,22278125	-0,02001700891350
x_3	0,202764241086494	-0,00068016241917
x_4	0,202084078667324	-0,00002090253673
x_5	0,202063176130592	-0,00000064014673
x_6	0,202062535983858	-0,00000001960260

Wieviele Iterationen $x_{n+1} = f(x_n)$ benötigt man für Genauigkeit $\varepsilon = 10^{-3} = 0{,}001$?

1) a priori Fehler: $|x_n - \bar{x}| \le \frac{c^n}{1-c} |x_1 - x_0| = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 - \frac{3}{4}} \cdot 0{,}26875 = 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot 0{,}26875$

also $\quad 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot 0{,}26875 < \varepsilon = 0{,}001$

$$\iff \left(\frac{3}{4}\right)^n < \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{0{,}26875} \cdot 0{,}001$$

$$\iff n > \frac{\ln\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{0{,}26875} \cdot 0{,}001\right)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} = 24{,}2698\ldots$$

Also nach 25 Iterationen ist der Fehler kleiner als $0{,}001$.

2) a posteriori Fehler: $|x_n - \bar{x}| \le \frac{1}{1-c} |x_n - x_{n-1}| = 4\,|x_n - x_{n-1}|$

für $n=4$ $\quad |x_n - \bar{x}| \le 0{,}0001228\ldots < 0{,}001$

Also nach 4 Iterationen ist der Fehler schon kleiner als $0{,}001$.

$\rightsquigarrow$ habe die eindeutige Nst. von p auf $[0,1]$ gefunden

gibt aber noch mehr – allerdings außerhalb von $[0,1]$

b) Suche Nullstellen von $f(x) = \cos(x) - x$, also Fixpkt. von $g(x) := \cos(x)$

Auf $[0,1]$ ist g diffbar mit $g'(x) = -\sin(x)$, $C = \max_{\xi \in [0,1]} |g'(\xi)| < 1$, $g[0,1] \subseteq [0,1]$

$\overset{1.7+1.9}{\Longrightarrow}$ $\exists! \, \bar{x} \in [0,1]$ mit $g(\bar{x}) = \bar{x}$.

1.11 Prop.: $D \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschl., $f : D \to D$ C^1-Fkt., $C := \max_{\xi \in D} \| Jf(\xi) \| < 1$

$\Longrightarrow$ f kontrahierend und hat Fixpkt.

wo $$Jf(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\xi) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\xi) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\xi) & \cdots & \end{pmatrix}$$ Jacobimatrix / Funktionalmatrix