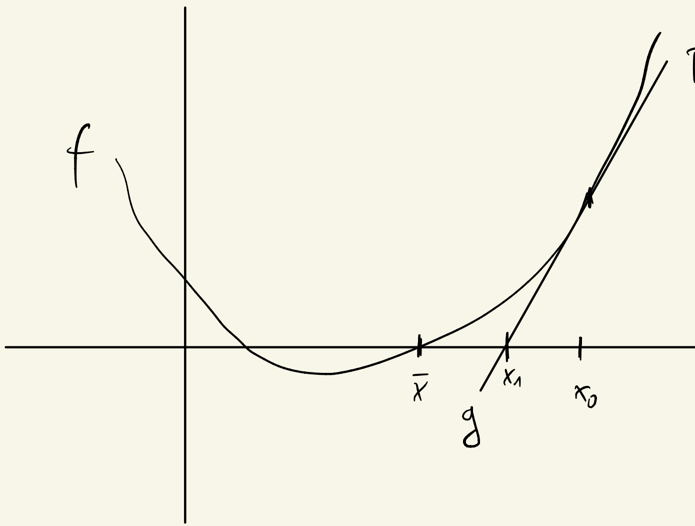
§ 1.2 Newtonverfahren für nichtlineare Gleichungen [= Bärwolff 7.2]

Anwendung von B. Fixpktsatz einigermaßen restriktiv: muss Kontraktion nachweisen (häufig in Umgebung des Fixpktes gegeben)

Häufig anwendbar: Newtonverfahren. Benötige aber guten Startwert

Betrachte $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig diffb. Suche $\bar{x} \in D$ mit $f(\bar{x}) = 0$.

Sei x_0 als „in der Nähe von $\bar{x}$" bekannt, sei $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in [\bar{x}, x_0]$



Tangente an f an der Stelle x_0:

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

x_1 Nst. von g: $\quad 0 = g(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$

$$\Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad (f'(x_0) \neq 0)$$

oft ist x_1 näher an $\bar{x}$

Versuche also Iteration $\displaystyle x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

1.12 Satz (Newton-Verfahren): Sei $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ 2-mal stetig diffb., $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in D$.

Sei $x_0 \in D$ mit $[x_0 - r, x_0 + r] \subseteq D$ für ein $r > 0$.

Sei $0 < K < 1$ mit
$$\left| \frac{f(x) f''(x)}{f'(x)^2} \right| \leq K \qquad \forall x \in D$$
und
$$\left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| \leq (1-K) r$$

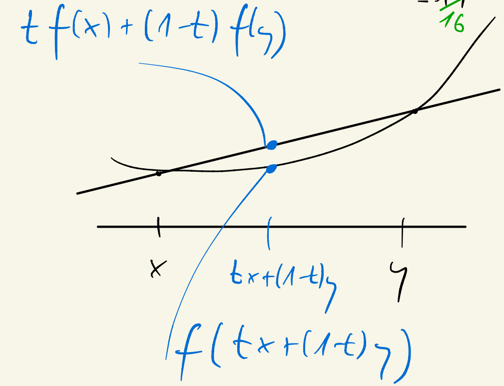
Dann hat f genau eine Nst. $\bar{x} \in D$ und die Newtonfolge $x_{n+1} := x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ konvergiert quadratisch gegen $\bar{x}$, d.h. $|x_{n+1} - \bar{x}| \leq C |x_n - \bar{x}|^2$ $\forall n \in \mathbb{N}$, für ein $0 < C < 1$

Es gilt die Fehlerabschätzung $|x_n - \bar{x}| \leq \dfrac{|f(x_n)|}{\mu}$ mit $0 < \mu = \min\limits_{x \in D} |f'(x)|$

„Bew.:" $g(x) := x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ ist kontrahierend $\overset{\text{B. Fixpktsatz}}{\Longrightarrow}$ $x_{n+1} := g(x_n)$ konvergiert. $\square$

Ist also x_0 „nah" an $\bar{x}$, dann ist $f(x_0)$ nah an $f(\bar{x}) = 0$. Es sollte dann möglich sein K, r zu finden.

Besonders schön sind konvexe Fktn (gut für Optimierungsprobleme)



1.~~14~~ 13 **Def:** $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ konvex, falls $\forall x,y\in[a,b]\ \forall t\in[0,1]$:

$$f(tx+(1-t)y)\le t\,f(x)+(1-t)\,f(y)$$

1.~~15~~ 14 **Lemma:** $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 2mal stetig diffb.

f konvex $\Longleftrightarrow$ f' mon. wachsend $\Longleftrightarrow$ $f''(x)>0 \quad \forall x\in[a,b]$

1.~~16~~ 15 **Satz (Newtonverfahren für konvexe Funktionen):**

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 2-mal stetig diffb., konvex, $f'(x)\neq 0 \ \forall x\in[a,b]$, $f(a)f(b)<0$

(d.h. $f(a)<0<f(b)$ oder $f(a)>0>f(b)$).

Dann konvergiert die Newtonfolge $x_{n+1}:=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

für $x_0=a$ falls $f(a)>0$

und für $x_0=b$ falls $f(b)>0$

gegen eine eind. bestimmte Nst. $\bar{x}\in[a,b]$.

~~1.17~~ 16 **Bsp:** a) $f(x) = x^2 - d$, $d > 0$. Suche $f(x) = 0$, suche also $x = \sqrt{d}$. Sei $d = 2$.

Überprüfe: f 2mal stetig diffb., $f'(x) = 2x$, $f''(x) \equiv 2$

$a = 1$: $f(a) = -1 < 0 < \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 = \frac{1}{4} = f(1{,}5) = f(b)$

$b = 1{,}5$

Und $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in [a,b]$, $f'' > 0$ (d.h. f konvex)

$\overset{1.16}{\Longrightarrow}$ also konvergiert $x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$

Starte mit $x_0 = 1{,}5$ (da $f(a) < 0$).

$x_1 = 1{,}41166\ldots$ $\quad \left(x_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{6} + \frac{8}{6}\right) = \frac{17}{12} \right)$

$x_2 = 1{,}414215\ldots$

$x_3 = 1{,}414213\ldots$

$x_4 = 1{,}414213\ldots$

$-\cancel{19}$ 18

b) $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x + \frac{1}{5}$ wie in Bsp. 1.10. f 2-mal stetig diffb.

$f(0{,}1) \geq -0{,}1 + \frac{1}{5} = 0{,}1 > 0$ $\qquad$ $f(0{,}5) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} < 0$

$f(0{,}2) > -0{,}2 + \frac{1}{5} = 0$ $\qquad$ also $a = 0{,}1$, $b = 0{,}5$ oder $a = 0{,}2$, $b = 0{,}5$.

$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 1 \neq 0 \quad \forall x \in [a,b]$

$f''(x) = \frac{3}{2}x > 0$ konvex

$\overset{1.16}{\Longrightarrow}$ also konvergiert $x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\frac{1}{4}x_n^3 - x_n + \frac{1}{5}}{\frac{3}{4}x_n^2 - 1}$ $(*)$

mit Startwert $x_0 = 0{,}1$ oder $x_0 = 0{,}2$

Newton

$x_{n+1} = (*)$

		f(x)
x_0	0,1	0,10025
x_1	0,201007556675063	0,001022822556467
x_2	0,202062342434329	0,000000168020066
x_3	0,20206251576201 7	0,000000000000004
x_4	0,20206251576202 2	0

		f(x)
x_0	0,2	0,002
x_1	0,202061855670103	0,000000639878686
x_2	0,202062515761954	0,000000000000066
x_3	0,202062515762022	0
x_4	0,202062515762022	0

		f(x)
x_0	1	-0,55
x_1	-1,2	0,968
x_2	-13,3	-574,659249999994
x_3	-8,93552699033548	-169,225728863276
x_4	-6,06158206166402	-49,418257564886 8

Banach (1.10)

$x_{n+1} = \underbrace{\frac{1}{4}x_n^3 + \frac{1}{5}}$

[für Fixpunkt $g(x) = f(x) + x$ betrachtet]

		~~p(x)~~ f(x)
x_0	0,1	0,10025
x_1	0,20025	0,001757509378906
x_2	0,202007509378906	0,000053322439159
x_3	0,202060831818066	0,000001632378745
x_4	0,202062464196812	0,000000049986183
x_5	0,202062514182995	0,000000001530673

		~~p(x)~~ f(x)
x_0	0,2	0,002
x_1	0,202	0,000060601999999
x_2	0,202060602	0,000001855159460
x_3	0,202062457159461	0,000000056808036
x_4	0,202062513967498	0,000000001739572
x_5	0,20206251570707	0,000000000053269

		~~p(x)~~ f(x)
x_0	1	-0,55
x_1	0,45	-0,22721875
x_2	0,22278125	-0,020017008913505
x_3	0,202764241086494	-0,000680162419170
x_4	0,202084078667324	-0,000020902536732
x_5	0,202063176130592	-0,000000640146734
x_6	0,202062535983858	-0,000000019602604

Vergleich:

	Newton	Banachsche Fixpunktsatz
Konvergenzgeschwindigkeit	quadratisch ($p=2$) (Newton ist schneller)	linear ($p=1$)
Konvergenzbereich	$\lvert x_0 - \bar{x} \rvert$ muss sehr klein sein	x_0 muss nur aus Kontraktionsbereich sein (Banach-Bereich ist größer)
Voraussetzungen	f 2-mal stetig diffbar, $f' \neq 0$, $f'' > 0$, $f(a), f(b)$ verschiedene Vorzeichen	Kontraktion

Varianten:
- Sekantenverfahren
- Regula falsi
- Bisektionsverfahren
- modifiziertes Newtonverf.
- vereinf. Newtonverf.
- mehrdim. Newtonverf. $\longrightarrow$ siehe 1.17

1.~~13~~ 17 Satz (mehrdim. Newtonverfahren): $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ in Umgebung D von $\bar{x}$ mit $f(\bar{x}) = 0$

2-mal stetig diffbar, $Jf(x)$ regulär (d.h. invbar) $\forall x \in \mathring{D}$.

Dann konvergiert das Newtonverfahren $x_{n+1} = x_n - (Jf(x_n))^{-1} f(x_n)$ gegen die Nst. $\bar{x}$, falls $\|x_0 - \bar{x}\|$ hinreichend klein ist, in quadr. Konvergenz.

Löse oft stattdessen $Jf(x_n)\, z_{n+1} = -f(x_n)$ als Gl.system und finde dann $x_{n+1} = x_n + z_{n+1}$

(schneller als $Jf(x_n)$ zu invertieren)

$$\left[\; x_{n+1} = x_n - Jf(x_n)^{-1} f(x_n) \iff Jf(x_n)\, x_{n+1} = Jf(x_n)\, x_n - f(x_n) \iff Jf(x_n)\underbrace{(x_{n+1} - x_n)}_{=:\, z_{n+1}} = -f(x_n) \;\right]$$

Newton-Verfahren

1. Man wählt einen Anfangswert $\mathbf{x}_0 \in \dot{D}$.
2. Man berechnet $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \ldots, \mathbf{x}_k, \ldots$, indem man nacheinander für $k = 0, 1, 2, \ldots$ das Gleichungssystem

$$F'(\mathbf{x}_k)\mathbf{z}_{k+1} = -F(\mathbf{x}_k) \tag{7.24}$$

   nach $\mathbf{z}_{k+1}$ auflöst und $\mathbf{x}_{k+1} := \mathbf{x}_k + \mathbf{z}_{k+1}$ bildet. Dabei wird $F'(\mathbf{x}_k)$ als regulär und $\mathbf{x}_k \in \dot{D}$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$ vorausgesetzt.
3. Das Verfahren wird abgebrochen, wenn $||\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k||$ unterhalb einer vorgegebenen Genauigkeitsschranke liegt oder eine vorgegebene maximale Iterationszahl erreicht ist.

(Bärwolff, S. 190)