§ ~~1.4~~ 1.3 Iterative Lösungen für lin. GLS [= 7.5 Bärwolff]

Wollen im Folgenden $Ax = b$ lösen mit $A \in M_n(\mathbb{R})$ invertierbar, $b \in \mathbb{R}^n$.

Im Prinzip: A^{-1} berechnen, $x = A^{-1}b$ als Lösung.

Aber: Berechnung von A^{-1} wird als großer Aufwand angenommen

$\rightsquigarrow$ iterative Lösung

~~1.20~~ 18 Def.: (a): Eine Abb. $\|\cdot\| : M_n(\mathbb{R}) \to [0,\infty)$ heißt (submultiplikative) Matrixnorm, falls

Norm
(i) $\|A\| = 0 \iff A = 0$, $A \in M_n(\mathbb{R})$
(ii) $\|\lambda A\| = |\lambda|\,\|A\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in M_n(\mathbb{R})$
(iii) $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ „Dreiecks-Ungleichung" Δ-Ungl.
(iv) $\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|$, $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ Submultiplikativität

(b) $\|\cdot\|$ heißt kompatibel/verträglich mit einer Vektornorm $\|\cdot\|_V$ (d.h. (i)-(iii)) auf $\mathbb{R}^n$, falls

$$\|Ax\|_V \le \|A\| \cdot \|x\|_V \qquad \forall A \in M_n(\mathbb{R}),\ x \in \mathbb{R}^n$$

(c) $r(A) := \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ Eigenwert von } A\}$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ „Spektralradius"

d.h. $\exists x \neq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $Ax = \lambda x$

~~1.21~~ 19 Bsp.: (a) $\|A\|_1 := \max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^n |a_{ij}|$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ „Spaltensummennorm"

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \|A\|_1 = \max\Big(\underbrace{|0| + |2|}_{=2},\ \underbrace{|-1| + |-3|}_{=4}\Big) = 4$$

$\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^n |x_i|$, $x \in \mathbb{R}^n$.

$\|Ax\|_1 \le \|A\|_1 \|x\|_1$, $\|A\|_1 = \max\limits_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1$ d.h. Matrixnorm $\|\cdot\|_1$ kompatibel mit Vektornorm $\|\cdot\|_1$

(b) $\|A\|_\infty := \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}|$ „Zeilensummennorm"

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \|A\|_\infty = \max\big(|0| + |-1|,\ |2| + |-3|\big) = 5$$

$\|x\|_\infty = \max\limits_{i=1..n} |x_i|$, $x \in \mathbb{R}^n$

$\|Ax\|_\infty \le \|A\|_\infty \|x\|_\infty$, $\|A\|_\infty = \max\limits_{\|x\|_\infty = 1} \|Ax\|_\infty$, $\|A\|_\infty = \|A^t\|_1$

(c) $\|A\|_2 = \sqrt{r(A^tA)}$ Spektralnorm

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad A^tA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$$

Eig.Werte: $\chi(x) = \det\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} - A^tA\right) = \det\begin{pmatrix} x-4 & 6 \\ 6 & x-10 \end{pmatrix} = (x-4)(x-10) - 36$

Also $0 = \chi(x) = (x-4)(x-10) - 36$
$$= x^2 - 14 + 4$$
$$= (x-7)^2 - 45$$
$\iff x = 7+\sqrt{45}$ oder $x = 7-\sqrt{45}$

$\implies \|A\|_2 = \sqrt{r(A^tA)} = \sqrt{\max(|7+\sqrt{45}|, |7-\sqrt{45}|)} = \sqrt{7+\sqrt{45}}$
$\approx 3{,}702$

Eigenschaften: $\|UAV\|_2 = \|A\|_2 \quad \forall U,V$ ~~unitär~~, orthogonal

$\|A\|_2^2 = \max\limits_{\|x\|_2=1} \langle Ax, Ax\rangle$, $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$\|A\|_2 \le \sqrt{\|A\|_1 \cdot \|A\|_\infty}$ $\quad (3{,}702 \le \sqrt{4\cdot 5} \approx 4{,}472)$

$\|x\|_2 := \sqrt{\sum |x_i|^2}$, $x \in \mathbb{R}^n$ eukl. Norm

$\|Ax\|_2 \le \|A\|_2 \|x\|_2$, $\quad \|A\|_2 = \max\limits_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$

(d) $\|A\|_F := \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$ Frobeniusnorm / Schurnorm / Hilbert-Schmidt-Norm (eukl. Norm für $A \in M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$) -29- 24

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. $\quad \|A\|_F = \sqrt{|0|^2 + |-1|^2 + |2|^2 + |-3|^2} = \sqrt{14} \approx 3{,}741$

$\|A\|_2 \le \|A\|_F$, $\quad \|Ax\|_2 \le \|A\|_F \|x\|_2$

1.~~22~~20 Splittingverfahren: -31- 27

(1) Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ invertierbar, $b \in \mathbb{R}^n$. Will

$$Ax = b \qquad (\text{Lösung: } x = A^{-1}b\text{, aber } A^{-1} \text{ aufwendig})$$

lösen, z.B. im Kontext von part. DGL (hier z.B. A „sparse", d.h. viele Nullen haben)

Sei $B \in M_n(\mathbb{R})$ invertierbar. Typisch: B^{-1} schneller zu berechnen als A^{-1}

Schreibe $A = B + (A-B)$. Dann

$$Ax = b$$
$$\iff Bx = (B-A)x + b$$
$$\iff x = \underbrace{(E - B^{-1}A)}_{=:S}x + B^{-1}b =: \Phi(x) \quad \text{Fixpunktgleichung}$$

S „Iterationsmatrix"

(2) Satz (Konvergenz des Splittingverfahrens): Seien A, B, b, S wie oben.

(a) $\|S\|_\alpha < 1$ für ein $\alpha \in \{1, 2, \infty\}$

$\implies$ die Fixpunktgleichung $\Phi(x) = x$ hat genau eine Lösung, nämlich

$\bar{x} = A^{-1}b$ und das Verfahren $x_k := Sx_{k-1} + B^{-1}b$ konvergiert gegen $\bar{x}$, für beliebigen Startwert $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

a priori Fehler: $\|x_k - \bar{x}\|_\alpha \leq \dfrac{\|S\|_\alpha^k}{1-\|S\|_\alpha} \|x_1 - x_0\|_\alpha$

(b) Das Iterationsverfahren $x_k = Sx_{k-1} + B^{-1}b$ konvergiert $\iff r(S) < 1$

<u>Bew:</u> (a) $\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_\alpha = \|(Sx + B^{-1}b) - (Sy + B^{-1}b)\|_\alpha$

$$= \|S(x-y)\|_\alpha \underset{\text{kompatibel}}{\leq} \underbrace{\|S\|_\alpha}_{=: C < 1} \|x-y\|_\alpha \quad \text{Kontraktion} \rightsquigarrow \text{Banach Fixpktsatz}$$

(b) ... □

-34-
29

(3) Abhängigkeit von α möglich:

für $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ war

$\|A\|_2 \approx 3{,}702$, $\|A\|_1 = 4$, $\|A\|_\infty = 5$

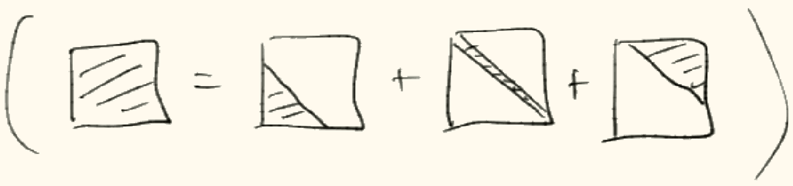
Für $S = \frac{1}{4}A$ wäre also
$\|S\|_2 < 1$ Kontraktion $\rightsquigarrow$ Satz anwendbar
$\|S\|_1 = 1$ keine Kontraktion
$\|S\|_\infty > 1$ keine Kontraktion $\Big\} \rightsquigarrow$ Satz nicht anwendbar

-35-
30

1.~~23~~ 21 <u>Jacobi-/Gesamtschrittverfahren</u>: Betrachte spezielle Situation des Splittingverfahrens.

(1) $A \in M_n(\mathbb{R})$. Schreibe

$$A = L + D + U = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$



wobei $L = (l_{ij})$, $l_{ij} := \begin{cases} a_{ij} & i > j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ strikte untere Dreiecksmatrix

$D = (d_{ij})$, $d_{ij} := \begin{cases} a_{ii} & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ Diagonalmatrix

$U = (u_{ij})$, $u_{ij} := \begin{cases} a_{ij} & i < j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ strikte obere Dreiecksmatrix

(2) Nehme an, dass D invertierbar ist, also $a_{ii} \neq 0 \ \forall i$.

also $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & & 0 \\ & \frac{1}{a_{22}} & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$

-36-
31

(3) Splittingverfahren mit $B := D$ liefert Iterationsmatrix

$$S = E - B^{-1}A = D^{-1}D - D^{-1}A$$
$$= D^{-1}(D - A)$$
$$(A = L + D + U) \quad \overset{\downarrow}{=} -D^{-1}(L+U)$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & - & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Dann $x_k = S x_{k-1} + B^{-1} b$

$$= -D^{-1}(L+U)x_{k-1} + D^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 1}}^{n} a_{1i}(x_{k-1})_i\right) \\ \vdots \\ \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{n} a_{ni}(x_{k-1})_i\right) \end{pmatrix}$$

also $(x_k)_j = \frac{1}{a_{jj}}\left(b_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ji}(x_{k-1})_i\right)$

Wann konvergiert das? Wenn $\|S\|_\alpha < 1$? Finde Kriterium an A, so dass $\|S\|_\alpha < 1$.