§ ~~1.4~~ 1.3 Iterative Lösungen für lin. GLS [= 7.5 Bärwolff] ~~26~~ 21

Wollen im Folgenden $Ax = b$ lösen mit $A \in M_n(\mathbb{R})$ invertierbar, $b \in \mathbb{R}^n$.

Im Prinzip: A^{-1} berechnen, $x = A^{-1}b$ als Lösung.

Aber: Berechnung von A^{-1} wird als großer Aufwand angenommen

$\rightsquigarrow$ iterative Lösung

~~1.20~~ 1.18 Def.: (a): Eine Abb. $\|\cdot\|: M_n(\mathbb{R}) \to [0,\infty)$ heißt (submultiplikative) Matrixnorm, falls

Norm
$$\begin{cases} \text{(i)} & \|A\| = 0 \iff A = 0, \quad A \in M_n(\mathbb{R}) \\ \text{(ii)} & \|\lambda A\| = |\lambda|\,\|A\|, \quad \lambda \in \mathbb{R},\ A \in M_n(\mathbb{R}) \\ \text{(iii)} & \|A+B\| \le \|A\| + \|B\|, \quad A, B \in M_n(\mathbb{R}) \end{cases}$$
„Dreiecks-Ungleichg." Δ-Ungl.

(iv) $\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|$, $\quad A, B \in M_n(\mathbb{R})$ Submultiplikativität

(b) $\|\cdot\|$ heißt kompatibel/verträglich mit einer Vektornorm $\|\cdot\|_V$ auf $\mathbb{R}^n$, falls (d.h. (i)-(iii))

$$\|Ax\|_V \le \|A\| \cdot \|x\|_V \qquad \forall A \in M_n(\mathbb{R}),\ x \in \mathbb{R}^n$$

(c) $r(A) := \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ Eigenwert von } A\}$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ „Spektralradius"

d.h. $\exists x \neq 0, x \in \mathbb{R}^n$, $Ax = \lambda x$

~~27~~ 22

~~1.21~~ 1.19 Bsp.: (a) $\|A\|_1 := \max\limits_{1 \le j \le n} \sum\limits_{i=1}^n |a_{ij}|$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ „Spaltensummennorm"

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \|A\|_1 = \max\big(\underbrace{|0| + |2|}_{=2}, \underbrace{|-1| + |-3|}_{=4}\big) = 4$$

$\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^n |x_i|$, $x \in \mathbb{R}^n$.

$\|Ax\|_1 \le \|A\|_1 \|x\|_1$, $\quad \|A\|_1 = \max\limits_{\|x\|_1 = 1} \|Ax\|_1$ d.h. Matrixnorm $\|\cdot\|_1$ kompatibel mit Vektornorm $\|\cdot\|_1$

(b) $\|A\|_\infty := \max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}|$ „Zeilensummennorm"

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \|A\|_\infty = \max\big(|0| + |-1|, |2| + |-3|\big) = 5$$

$\|x\|_\infty = \max\limits_{i=1..n} |x_i|$, $x \in \mathbb{R}^n$

$\|Ax\|_\infty \le \|A\|_\infty \|x\|_\infty$, $\quad \|A\|_\infty = \max\limits_{\|x\|_\infty = 1} \|Ax\|_\infty$, $\quad \|A\|_\infty = \|A^t\|_1$

~~28~~ 23

(c) $\|A\|_2 = \sqrt{r(A^t A)}$ Spektralnorm

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad A^t A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$$

Eig.Werte: $\chi(x) = \det\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} - A^t A\right) = \det\begin{pmatrix} x-4 & 6 \\ 6 & x-10 \end{pmatrix} = (x-4)(x-10) - 36$

Also $\quad 0 = \chi(x) = (x-4)(x-10) - 36$

$$= x^2 - 14 + 4$$

$$= (x-7)^2 - 45$$

$\iff \quad x = 7 + \sqrt{45} \quad$ oder $\quad x = 7 - \sqrt{45}$

$\Rightarrow \quad \|A\|_2 = \sqrt{r(A^tA)} = \sqrt{\max(|7+\sqrt{45}|, |7-\sqrt{45}|)} = \sqrt{7+\sqrt{45}}$
$\approx 3{,}702$

Eigenschaften: $\quad \|UAV\|_2 = \|A\|_2 \quad \forall U,V$ ~~unitär~~, orthogonal

$\|A\|_2^2 = \max\limits_{\|x\|_2=1} \langle Ax, Ax \rangle \quad , \quad \langle x,y \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$

$\|A\|_2 \le \sqrt{\|A\|_1 \cdot \|A\|_\infty} \qquad (3{,}702 \le \sqrt{4 \cdot 5} \approx 4{,}472)$

$\|x\|_2 := \sqrt{\sum |x_i|^2}$, $x \in \mathbb{R}^n$ eukl. Norm

$\|Ax\|_2 \le \|A\|_2 \, \|x\|_2 \quad , \quad \|A\|_2 = \max\limits_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$

(d) $\quad \|A\|_F := \sqrt{\sum\limits_{ij} |a_{ij}|^2} \quad$ Frobeniusnorm / Schurnorm / Hilbert-Schmidt-Norm (eukl. Norm für $A \in M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$) -29- 24

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad \|A\|_F = \sqrt{|0|^2 + |-1|^2 + |2|^2 + |-3|^2} = \sqrt{14} \approx 3{,}741$

$\|A\|_2 \le \|A\|_F \quad , \quad \|Ax\|_2 \le \|A\|_F \, \|x\|_2$

1.~~22~~ 20 Splittingverfahren: -31- 27

(1) Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ invertierbar, $b \in \mathbb{R}^n$. Will

$$Ax = b$$

(Lösung: $x = A^{-1}b$, aber A^{-1} aufwändig) lösen, z.B. im Kontext von part. DGL (hier z.B. A „sparse", d.h. viele Nullen haben)

Sei $B \in M_n(\mathbb{R})$ invertierbar. Typisch: B^{-1} schneller zu berechnen als A^{-1}

Schreibe $A = B + (A-B)$. Dann

$$Ax = b$$

$$\iff Bx = (B-A)x + b$$

$$\iff x = \underbrace{(E - B^{-1}A)}_{=:S}x + B^{-1}b =: \Phi(x)$$

Fixpunktgleichung

„Iterationsmatrix"

(2) Satz (Konvergenz des Splittingverfahrens): Seien A, B, b, S wie oben.

(a) $\|S\|_\alpha < 1$ für ein $\alpha \in \{1, 2, \infty\}$

$\Rightarrow$ die Fixpunktgleichung $\Phi(x) = x$ hat genau eine Lösung, nämlich

$\bar{x} = A^{-1}b$ und das Verfahren $x_k := Sx_{k-1} + B^{-1}b$ konvergiert gegen $\bar{x}$, für beliebigen Startwert $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

a priori Fehler: $\|x_k - \bar{x}\|_\alpha \le \dfrac{\|S\|_\alpha^k}{1-\|S\|_\alpha} \|x_1 - x_0\|_\alpha$

(b) Das Iterationsverfahren $x_k = Sx_{k-1} + B^{-1}b$ konvergiert $\iff r(S) < 1$

<u>Bew:</u> (a) $\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_\alpha = \|(Sx + B^{-1}b) - (Sy + B^{-1}b)\|_\alpha$

$$= \|S(x-y)\|_\alpha \underset{\text{kompatibel}}{\le} \underbrace{\|S\|_\alpha}_{= C < 1} \|x-y\|_\alpha \quad \text{Kontraktion} \leadsto \text{Banach Fixpktsatz}$$

(b) ...

$\square$

-34- 29

(3) Abhängigkeit von α möglich:

für $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ war

$\|A\|_2 \approx 3{,}702$, $\|A\|_1 = 4$, $\|A\|_\infty = 5$

Für $S = \frac{1}{4}A$ wäre also

$\|S\|_2 < 1$ Kontraktion $\leadsto$ Satz anwendbar

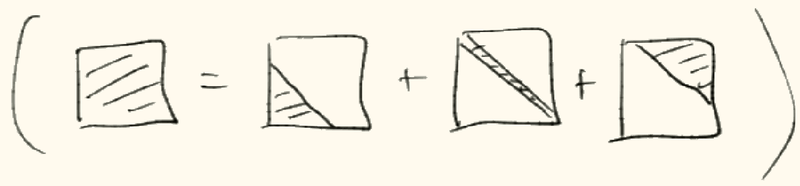
$\left.\begin{array}{ll} \|S\|_1 = 1 & \text{keine Kontraktion} \\ \|S\|_\infty > 1 & \text{keine Kontraktion} \end{array}\right\} \leadsto$ Satz nicht anwendbar

-35- 30

1.~~23~~ 21 <u>Jacobi-/Gesamtschrittverfahren</u>: Betrachte spezielle Situation des Splittingverfahrens.

(1) $A \in M_n(\mathbb{R})$. Schreibe

$$A = L + D + U = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$



wobei $L = (l_{ij})$, $l_{ij} := \begin{cases} a_{ij} & i > j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ strikte untere Dreiecksmatrix

$D = (d_{ij})$, $d_{ij} := \begin{cases} a_{ii} & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ Diagonalmatrix

$U = (u_{ij})$, $u_{ij} := \begin{cases} a_{ij} & i < j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ strikte obere Dreiecksmatrix

(2) Nehme an, dass D invertierbar ist, also $a_{ii} \neq 0 \ \forall i$.

also $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & & 0 \\ & \frac{1}{a_{22}} & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$

-36- 31

(3) Splittingverfahren mit $B := D$ liefert Iterationsmatrix

$$S = E - B^{-1}A = D^{-1}D - D^{-1}A$$
$$= D^{-1}(D-A)$$
$$(A = L+D+U) \quad \overset{\downarrow}{=} -D^{-1}(L+U)$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & - & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & 0 \end{pmatrix}$$

Dann $x_k = S x_{k-1} + B^{-1} b$

$$= -D^{-1}(L+U)x_{k-1} + D^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq 1}}^{n} a_{1i}(x_{k-1})_i\right) \\ \vdots \\ \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{n} a_{ni}(x_{k-1})_i\right) \end{pmatrix}$$

also $(x_k)_j = \frac{1}{a_{jj}}\left(b_j - \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ji}(x_{k-1})_i\right)$

Wann konvergiert das? Wann $\|S\|_\alpha < 1$? Finde Kriterium an A, so dass $\|S\|_\alpha < 1$.

14.5.2024

(4) $A \in M_n(\mathbb{R})$ strikt diagonal dominant $:\iff \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad \forall i=1,\dots,n$

$A \in M_n(\mathbb{R})$ schwach diagonal dominant $:\iff \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \leq |a_{ii}| \quad \forall i=1,\dots,n$

$A \in M_n(\mathbb{R})$ irreduzibel $:\iff \forall i,j \in \{1,\dots,n\} \ \exists s \geq 0 \ \exists i_1,\dots,i_s \in \{1,\dots,n\}:$

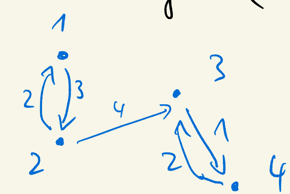
$$a_{ii_1} \cdot a_{i_1 i_2} \cdot \ldots \cdot a_{i_s j} \neq 0 \quad (s=0: \ a_{ij} \neq 0)$$

irreduzibel graphisch: betrachte Graph mit n Vertices und einer gerichteten Kante zwischen i und j, falls $a_{ij} \neq 0$.

Dann A irreduzibel $\iff$ Graph zusammenhängend (finde von jedem i einen Pfad zu j)

Bsp.:

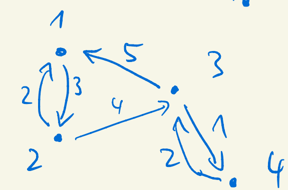
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



reduzibel

(kein Pfad von 3 nach 2 oder 4 nach 1)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$



irreduzibel

(5) Satz (Konvergenz des Jacobiverfahrens):

(a) $\underset{= L+D+U}{A}$ strikt diagonal dominant $\Rightarrow$ $r(S) < 1$ für $S = -D^{-1}(L+U)$

d.h. das Jacobiverfahren konvergiert

(b) A schwach diagonal dominant und irreduzibel $\Rightarrow$ ebenso.

Bew: (a) $\|S\|_\infty = \max_i \sum_j |S_{ij}| = \max_{1\le i\le n} \sum_{\substack{j=1\\ i\ne j}}^{n} \left| -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| = \max_{1\le i\le n} \frac{1}{|a_{ii}|} \underbrace{\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} |a_{ij}|}_{< |a_{ii}|} < 1$

da strikt diagonal dominant

dann Satz zu Splittingverfahren

(b) ...

$\square$

Bemerkung: (b) nötig für Diskretisierungen von elliptischen Randwertproblemen

(finite Elemente, part. DGl mit 2-Punkt-Randwertproblem)

(6) Bsp: $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $A = L + D + U = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Frage nach $Ax = b$

A strikt diagonal dominant: $\forall i \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|$, d.h. $i=1: \underbrace{|a_{12}|}_{=2} < \underbrace{|a_{11}|}_{=4}$

$i=2 \quad \underbrace{|a_{21}|}_{=1} < \underbrace{|a_{22}|}_{=2}$ ✓

$\Rightarrow$ JVerf. konv.

Also $S = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

$$x_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 1}}^{n} a_{1i} (x_{k-1})_i \right) \\ \frac{1}{a_{22}} \left(b_2 - \sum_{i \neq 2} a_{2i} (x_{k-1})_i \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \left(2 - 2 (x_{k-1})_2 \right) \\ \frac{1}{2} \left(-3 + 1 (x_{k-1})_1 \right) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - (x_{k-1})_2 \\ -3 + (x_{k-1})_1 \end{pmatrix}$$

für $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: $x_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - 0 \\ -3 + 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$x_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{3}{2} \\ -3 + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$

1.~~24~~22 Gauß-Seidelverfahren / Einzelschrittverfahren:

(1) Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A = L + D + U = \left(\triangle\right) + \left(\diagdown\right) + \left(\nabla\right)$ wie in 1.23(1)

(2) Nehme an, dass $L+D$ invertierbar ist (falls z.B. D nicht invertierbar)

(3) Splittingverfahren mit $B := L+D$ liefert Iterationsmatrix

$$S = E - B^{-1}A = (L+D)^{-1}\big((L+D) - A\big) = -(L+D)^{-1}U$$

Dann

$$\begin{aligned} x_k &= S x_{k-1} + B^{-1}b \\ &= (L+D)^{-1}(b - U x_{k-1}) \end{aligned}$$

(4) Satz (Konvergenz des Gauß-Seidel-Verfahrens):

A strikt diagonal dominant oder schwach diagonal dominant & irred. $\Longrightarrow$ Gauß-Seidel-Verf. konv. (genauso wie in J.-Verf)

(5) Berechnung: $x_k = (L+D)^{-1}(b - U x_{k-1})$

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow\quad (L+D)x_k &= b - U x_{k-1} \\ \Longleftrightarrow\quad D x_k &= b - L x_k - U x_{k-1} \\ \Longleftrightarrow\quad x_k &= -D^{-1}(L x_k + U x_{k-1}) + D^{-1}b \end{aligned}$$

Jacobi:

$$x_k = -D^{-1}(L x_{k-1} + U x_{k-1}) + D^{-1}b$$

Beachte: (*) $x_k = -D^{-1}(Lx_k + Ux_{k-1}) + D^{-1}b$

$$\Rightarrow \quad (x_k)_j = -\frac{1}{a_{jj}}\left(\sum_{i=1}^{j-1} a_{ji}(x_k)_i + \sum_{i=j+1}^{n} a_{ji}(x_{k-1})_i - b_j\right)$$

d.h. (*) ist wirklich eine Vorschrift zum Berechnen von x_k (sukzessive)

(6) Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{L} + \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U}$

Gauß-Seidel:

$$\begin{aligned} S &= -(L+D)^{-1}U \\ &= -\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Test: $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow \quad x_k = -(L+D)^{-1}Ux_{k-1} + (L+D)^{-1}b$

bzw. $j=1$ $\quad (x_k)_1 = -\underbrace{\frac{1}{a_{11}}}_{\frac{1}{4}}\left(0 + \underbrace{a_{12}}_{2}(x_{k-1})_2 - \underbrace{b_1}_{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x_{k-1})_2$

$j=2$ $\quad (x_k)_2 = -\underbrace{\frac{1}{a_{22}}}_{\frac{1}{2}}\left(\underbrace{a_{21}}_{-1}(x_k)_1 + 0 - \underbrace{b_2}_{-3}\right) = \frac{1}{2}(x_k)_1 - \frac{3}{2}$

(6) Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{L} + \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U}$

Gauß-Seidel:
$$S = -(L+D)^{-1}U$$
$$= -\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= -\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Test: $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= -\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad x_k = -(L+D)^{-1}Ux_{k-1} + (L+D)^{-1}b$$

bzw. $j=1$ $\quad (x_k)_1 = -\underbrace{\frac{1}{a_{11}}}_{\frac{1}{4}}\Big(0 + \underbrace{a_{12}}_{2}(x_{k-1})_2 - \underbrace{b_1}_{2}\Big) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x_{k-1})_2$

$j=2$ $\quad (x_k)_2 = -\underbrace{\frac{1}{a_{22}}}_{\frac{1}{2}}\Big(\underbrace{a_{21}}_{-1}(x_k)_1 + 0 - \underbrace{b_2}_{-3}\Big) = \frac{1}{2}(x_k)_1 - \frac{3}{2}$

mit $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ also $\quad x_1 = Sx_0 + (L+D)^{-1}b = -\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$

$(x_1)_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x_0)_2 = \frac{1}{2}$

$(x_1)_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{5}{4}$

$(x_2)_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{9}{8}$

$(x_2)_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{8} - \frac{3}{2} = -\frac{15}{16}$

1. ~~25~~ 23 Vgl. Jacobi und Gauß-Seidel:

(1) Bsp. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A = L + D + U$

Jacobi

$B = D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$S = E - B^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

$x_k = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + (x_{k-1})_2 \\ -3 + (x_{k-1})_1 \end{pmatrix}$

$x_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $x_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\|S\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| = \frac{1}{2}$

$\|\bar{x} - x_2\|_\infty = \max_i |\bar{x}_i - (x_2)_i|$
$= \max\left(\left|1 - \frac{5}{4}\right|, \left|-1 + \frac{5}{4}\right|\right)$
$= \boxed{\frac{1}{4}}$

GS

$B = L + D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$S = E - B^{-1}A = -\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

$x_k = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 - (x_{k-1})_2 \\ -3 + (x_k)_1 \end{pmatrix}$

$x_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} \frac{9}{8} \\ -\frac{15}{16} \end{pmatrix}$

$\|S\|_\infty = \frac{1}{2}$

$\|\bar{x} - x_2\|_\infty = \max_i |\bar{x}_i - (x_2)_i|$
$= \max\left(\left|1 - \frac{9}{8}\right|, \left|-1 + \frac{15}{16}\right|\right)$
$= \boxed{\frac{1}{8}}$ besser!

$\bar{x} = A^{-1}b$

$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Test: $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\bar{x} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(2) A str. diag. dom. $\xRightarrow{1.23(5) \,\&\, 1.24(4)}$ Jacobi & GS konvergieren, aber $\|S_{GS}\|_\infty \le \|S_{Jacobi}\| < 1$