18.6.2024

§ 2.4 Mehrschrittverfahren [Bärwolff 8.2]

2.22 Def.: (a) Ein m-Schrittverfahren (Mehrschrittverfahren) hat die Form

$$\sum_{j=0}^{m} a_j y_{s+j} = h\,\varphi(t_s, y_s, \dots y_{s+m}, h) \qquad (s=k-m+1)$$

mit $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{R}$, $a_m \neq 0$, Verfahrensfunktion $\varphi: [a,b] \times (\mathbb{R}^N)^{m+1} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^N$ und Startwerten $y_0, \dots, y_{m-1} \in \mathbb{R}^N$.

(b) Ist $\varphi(t_s, y_s, \dots y_{s+m}, h) = \sum_{j=0}^{m} b_j f(x_{s+j}, y_{s+j})$, so heißt das Verfahren linear,

also $$\sum_{j=0}^{m} a_j y_{s+j} = h \sum_{j=0}^{m} b_j f(x_{s+j}, y_{s+j}) \qquad (s=k-m+1)$$

bzw. $$a_0 y_{k-m+1} + a_1 y_{k-m+2} + \dots + a_m y_{k+1}$$
$$= h b_0 f(x_{k-m+1}, y_{k-m+1}) + h b_1 f(x_{k-m+2}, y_{k-m+2}) + \dots + h b_m f(x_{k+1}, y_{k+1})$$

$s=0$: $$\underbrace{a_0 y_0 + a_1 y_1 + \dots + a_{m-1} y_{m-1}}_{\text{Startwerte}} + \underbrace{a_m y_m}_{\rightsquigarrow\, y_m} = \underbrace{h b_0 f(x_0, y_0) + h b_1 f(x_1, y_1) \dots}_{\text{Startwerte}} + \underbrace{h b_m f(x_m, y_m)}_{=0 \text{ falls } b_m = 0}$$

2.22 Def.: (b) Ist $\varphi(t_s, y_s, \dots y_{s+m}, h) = \sum_{j=0}^{m} b_j f(x_{s+j}, y_{s+j})$, so heißt das Verfahren linear,

also $\sum_{j=0}^{m} a_j y_{s+j} = h \sum_{j=0}^{m} b_j f(x_{s+j}, y_{s+j})$ $\quad (s = k-m+1)$

bzw. $a_0 y_{k-m+1} + a_1 y_{k-m+2} + \dots + a_m y_{k+1}$

$= h b_0 f(x_{k-m+1}, y_{k-m+1}) + h b_1 f(x_{k-m+2}, y_{k-m+2}) + \dots + h b_m f(x_{k+1}, y_{k+1})$

(c) Ist im linearen MSV $b_m = 0$, so heißt es explizit, andernfalls implizit.

Im expliziten Fall und mit $a_m = 1$ (Beachte $a_m \neq 0$):

$$y_{k+1} = h b_0 f(x_{k-m+1}, y_{k-m+1}) + \dots + h b_{m-1} f(x_k, y_k) - a_0 y_{k-m+1} - \dots - a_{m-1} y_k$$

$= h \sum_{j=0}^{m-1} b_j f(x_{k-m+1+j}, y_{k-m+1+j}) - \sum_{j=0}^{m-1} a_j y_{k-m+1+j}$

D.h. für die Berechnung von y_{k+1} wird nicht nur y_k verwendet (wie im ESV), sondern m Werte $y_{k-m+1}, \dots, y_k$.

2.23 Bem: (a) $m=1$, $b_1=0$ (explizite Fall), $a_1=1$, $a_0=-1$, $b_0=1$.

Dann ist $$\sum_{j=0}^{m} a_j y_{s+j} = h \sum_{j=0}^{m} b_j f(x_{s+j}, y_{s+j}), \quad s=k-m+1=k$$

der Form $$-y_k + y_{k+1} = h f(x_k, y_k)$$

d.h. $$y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k) \qquad \text{Eulerverfahren}$$

als Lsg von $y' = f(x,y)$

(b) m bel., $b_m=0$ (explizite Fall), $a_m=1$, $a_{m-1}=-1$, $a_{m-2}=\ldots=a_0=0$.

Dann $$-y_k + y_{k+1} = h \sum_{j=0}^{m-1} b_j f(x_{s+j}, y_{s+j})$$

d.h. $$y_{k+1} = y_k + h\big(b_0 f(x_{k-m+1}, y_{k-m+1}) + \ldots + b_{m-1} f(x_k, y_k)\big)$$

also statt „$+h f(x_k, y_k)$" (Euler) nun „$+h(b_0 f(x_{k-m+1}, y_{k-m+1}) + \ldots)$"

(c) Formel funktioniert nur für $k \geq m$, benötige also Startwerte $y_0, \ldots, y_m$.
Will man also ein AWP $y' = f(x,y)$ mit x_0, y_0 gegeben, lösen, so muss man sich die fehlenden Startwerte $y_1, \ldots, y_m$ z.B. per Runge-Kutta beschaffen.

2.24 Def: Der <u>lokale Diskretisierungsfehler</u> eines linearen MSV ist
$$d_{k+1} := \sum_{j=0}^{m} \left(a_j y(x_{s+j}) - h\, b_j f(x_{s+j}, y(x_{s+j}))\right)$$
wobei y Lösung von $y' = f(t,y)$ ist.

Das Verfahren hat <u>Fehlerordnung</u> p, falls es ein $C>0$ gibt mit
$\max_k |d_{k+1}| \leq C h^{p+1}$ (schreibe auch $\max_k |d_k| \leq \mathcal{O}(h^{p+1})$).

Es heißt <u>konsistent</u>, falls $p \geq 1$.

2.25 Bspe: $a_m = 1$, $\quad y_{k+1} = h \sum_{j=0}^{m} b_j f(x_{k-m+1+j}, y_{k-m+1+j}) - \sum_{j=0}^{m-1} a_j y_{k-m+1+j}$

(a) Mittelpunktsregel, $m=2$. $\quad y_{k+1} = h b_0 f(x_{k-1}, y_{k-1}) + h b_1 f(x_k, y_k) + h b_2 f(x_{k+1}, y_{k+1}) - a_0 y_{k-1} - a_1 y_k$

d.h. $\quad y_{k+2} = h b_0 f(x_k, y_k) + h b_1 f(x_{k+1}, y_{k+1}) + h b_2 f(x_{k+2}, y_{k+2}) - a_0 y_k - a_1 y_{k+1}$

$$y_{k+2} = y_k + 2h f(x_{k+1}, y_{k+1}), \quad \text{Ordnung } p = 2$$

(b) Milne-Regel, $m=2$.
$$y_{k+2} = y_k + \frac{h}{3}\left(f(x_{k+2}, y_{k+2}) + 4 f(x_{k+1}, y_{k+1}) + f(x_k, y_k)\right)$$

(c) Methode von Adams-Bashforth (AB-Verfahren), $m=4$.

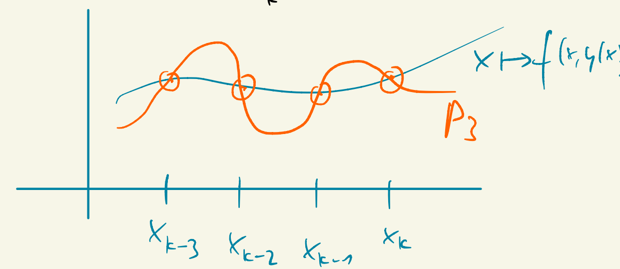
$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}\left(55\, f(x_k, y_k) - 59\, f(x_{k-1}, y_{k-1}) + 37\, f(x_{k-2}, y_{k-2}) - 9\, f(x_{k-3}, y_{k-3})\right)$$

$$d_{k+1} = \frac{251}{720} h^5 y^{(5)} + O(h^6),$$ Ordnung $p=4$, y Lsg von $y' = f(x,y)$

Herleitung der Koeffizienten:

(1) Betrachte $y' = f(x,y)$ bzw. äquivalent $y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x))\,dx$

(2) Betrachte $p_3(x) = \sum_{j=0}^{3} f_{k-j} L_{k-j}(x)$



mit $f_{k-j} := f(x_{k-j}, y_{k-j})$

und $L_{k-j}(x) := \prod_{\substack{i=k-3 \\ i \neq k-j}}^{k} \frac{x - x_i}{x_{k-j} - x_i}$ „Lagrangesches Basispolynom"

also $L_{k-j}(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = k-j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$, d.h. $p_3 \longrightarrow f$

Daher ist es sinnvoll f durch p_3 zu ersetzen und $y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int p_3$ zu lösen

(3) Berechne (mit $x_k = x_0 + kh$) das Integral $\int_{x_k}^{x_k+h} L_{k-1}(x)\,dx$ (für $\int_{x_k}^{x_{k+1}} p_3(x)\,dx$).

$$\int_{x_k}^{x_k+h} L_{k-1}(x)\,dx = \int_{x_k}^{x_k+h} \frac{\overbrace{(x-x_{k-3})}^{x-x_k+3h}}{\underbrace{(x_{k-1}-x_{k-3})}_{2h}} \cdot \frac{\overbrace{(x-x_{k-2})}^{x-x_k+2h}}{\underbrace{(x_{k-1}-x_{k-2})}_{h}} \cdot \frac{(x-x_k)}{\underbrace{(x_{k-1}-x_k)}_{-h}}\,dx$$

Substitution mit $\xi = \frac{x-x_k}{h}$, $dx = h\,d\xi$ | $\xi'(x) = \frac{1}{h}$, $\xi(x_k) = 0$, $\xi(x_{k+1}) = 1$

$$= h \int_0^1 \frac{(\xi+3)(\xi+2)\xi}{2 \cdot 1 \cdot (-1)}\,d\xi$$

$$= -\frac{h}{2} \int_0^1 (\xi^3 + 5\xi^2 + 6\xi)\,d\xi$$

$$= -\frac{h}{2}\left[\frac{1}{4} + \frac{5}{3} + \frac{6}{2} - 0 - 0 - 0\right] = -\frac{59}{24}h$$

$$\frac{3}{12} + \frac{20}{12} + \frac{36}{12} = \frac{59}{12}$$

$$L_{k-j}(x) := \prod_{\substack{i=k-3 \\ i \neq k-j}}^{k} \frac{x - x_i}{x_{k-j} - x_i}$$

$$\frac{x - x_k + 3h}{2h} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x - x_k}{h} + \frac{3}{2}$$

(4) Also
$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} L_k(x)\,dx = \frac{55}{24}h$$
$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} L_{k-1}(x)\,dx = -\frac{59}{24}h$$
$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} L_{k-2}(x)\,dx = \frac{37}{24}h$$
$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} L_{k-3}(x)\,dx = -\frac{9}{24}h$$
$$\Rightarrow \int_{x_k}^{x_{k+1}} p_3(x)\,dx = \sum_{j=0}^{3} f_{k-j} \int_{x_k}^{x_{k+1}} L_{k-j}(x)\,dx$$
$$= \frac{h}{24}\left(55 f_k - 59 f_{k-1} + 37 f_{k-2} - 9 f_{k-3}\right)$$

(5) Unter $p_3 \to f$ und $y(x_{k+1}) = y(x_k) - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t, y(t))\,dt$

also
$$y_{k+1} = y_k - \frac{h}{24}\left(55 f_k - 59 f_{k-1} + 37 f_{k-2} - 9 f_{k-3}\right)$$
ein sinnvolles Verfahren (abgeleitet aus Lagrange-Approximation)

(d) entsprechende 3-, 4-, 5-, 6-Schrittverfahren vom AB-Typ, siehe Bärwolff

Fehlerordnung m $(m = 3, 4, 5, 6)$

Verbesserung: Adams-Moulton-Methode (AM-Verfahren), implizit,

etwa für $m = 3$: $\quad y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}\left(9 f(x_{k+1}, y_{k+1}) + 19 f_k - 5 f_{k-1} + f_{k-2}\right)$,

Ordnung $m+1$

oder: Adams-Bashforth-Moulton-Verfahren (ABM-Verfahren)

analog zum Prädiktor-Korrektor-Verfahren, Ordnung $m+1$

Wie können im MSV

$$y_{k+1} = h b_0 f_{k-1} + h b_1 f_k - a_0 y_{k-1} - a_1 y_k$$

$$f_k := f(x_k, y_k)$$

die Koeffizienten sinnvoll gewählt werden?

$$\sum_{j=0}^{2} a_j y_{s+j} = h \sum_{j=0}^{2} b_j f_{s+j}$$

$a_2 = 1$, $b_2 = 0$ (explizit)

Bsp.: $f(x,y) = x^2 + 2x - y$ mit Lsg. $y(x) = x^2$ für $y' = f(x,y)$, $y(0) = 0$

y_{k+1}	$y(x_{k+1})$
y_0	x_0^2
y_1	x_1^2
y_2	x_2^2
y_3	x_3^2

ESV

2-Schrittverfahren

optimal

	x_k	Var 1	Var 2	Var 3	y(x_k)
a_0		1	-1	-1	
a_1		1	0	0	
b_0		1	2	0	
b_1		1	1	2	
h		1	1	1	
0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1
2	2	1	2	4	4
3	3	7	11	9	9
4	4	7	18	16	16
5	5	11	25	25	25
6	6	23	40	36	36
7	7	15	53	49	49
8	8	35	66	64	64
9	9	43	87	81	81

Ausprobieren ist anstrengend!

Aber: Habe Theorie, die uns hilft!

2.26 Fehlerordnungen:

(1) Lineares m-Schrittverfahren (LMSV)

$$\sum_{j=0}^{m} a_j y_{s+j} = h \sum_{j=0}^{m} b_j f(x_{s+j}, y_{s+j}) \qquad s = k-m+1$$

y Lsg. von $y' = f(x,y)$

(2) lokale Diskretisierungsfehler

$$d_{k+1} = \sum_{j=0}^{m} \Big[a_j y(\underbrace{x_{s+j}}_{= x_0 + (s+j)h}) - h b_j f(x_{s+j}, y(x_{s+j})) \Big] \qquad \text{(diskret)}$$

(3) lokale Verfahrensfehler

$$\eta(t,h) := \sum_{j=0}^{m} \Big[a_j y(t + jh) - h b_j f(t + jh, y(t+jh)) \Big] \qquad \text{(kontinuierlich)}$$

(2) lokaler Diskretisierungsfehler

$$d_{k+1} = \sum_{j=0}^{m} \Big[a_j \, y(\underbrace{x_{s+j}}_{= x_0 + (s+j)h}) - h b_j f(x_{s+j}, y(x_{s+j})) \Big] \qquad \text{(diskret)}$$

(3) lokaler Verfahrensfehler

$$\eta(t,h) := \sum_{j=0}^{m} \Big[a_j \, y(t+jh) - h b_j f(t+jh, y(t+jh)) \Big] \qquad \text{(kontinuierlich)}$$

(4) Fehlerordnung p, falls

$$\max_{m \le k \le n} |d_k| \le C h^{p+1}, \quad \text{für ein } C > 0 \quad (\text{also } \mathcal{O}(h^{p+1}))$$

konsistent, falls $p \geq 1$

(5) Konvergenzordnung p, falls

$$\max_{0 \le j \le n} \| y_j - y(x_j) \| \le C h^p \quad \text{für ein } C > 0, \text{ wenn } h \downarrow 0$$

(6) Konsistenzordnung p (oder: Ordnung p), falls

$$\sup_{t \in [a,b]} \| \eta(t,h) \| \le C h^{p+1} \quad \text{für ein } C > 0,\ h \downarrow 0$$

(7) charakteristische Polynome:

erstes char. Polynom $\rho(z) := \sum_{j=0}^{m} a_j z^j = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_m z^m$

zweites char. Polynom $\sigma(z) := \sum_{j=0}^{m} b_j z^j$

(8) nullstabil: $\rho(z) = 0 \implies |z| \leq 1$ Dahlquistsche Wurzelbedingung

$\rho(z), |z| = 1 \implies z$ einfache Nullstelle

(9) Lipschitzbedingung: $\left\| \sum_{j=0}^{m} b_j \left[f(x_{s+j}, v_j) - f(x_{s+j}, w_j) \right] \right\| \leq L \sum_{j=0}^{m} \|v_j - w_j\|$ für ein $L > 0$

$\forall v_j, w_j \in \mathbb{R}^N$

(10) Satz: a) MSV konsistent & nullstabil $\implies$ MSV konvergiert,

d.h. die Werte y_k konvergieren gegen $y(x_k)$

für $h \to 0$

b) MSV Konsistenzordnung $p \geq 1$, nullstabil, Lipschitzbed. $\implies$ Konvergenzordnung p

2.27 Koeffizientenwahl:

$$(1) \qquad \sum_{j=0}^{m} a_j \, y_{s+j} = h \sum_{j=0}^{m} b_j \, f(x_{s+j}, y_{s+j})$$

$$d_{k+1} = \sum_{j=0}^{m} \Big[a_j \, y(x_{s+j}) - h \, b_j \underbrace{f(x_{s+j}, y(x_{s+j}))}_{y'(x_{s+j})} \Big]$$

Taylor:

$$y(x_{s+j}) = \sum_{r=0}^{q} \frac{y^{(r)}(\tilde{x})}{r!} (x_{s+j} - \tilde{x})^r + R_{q+1}(x_{s+j}) = \sum_{r=0}^{q} \frac{y^{(r)}(\tilde{x})}{r!} (jh)^r + R_{q+1}$$

$$y'(x_{s+j}) = \sum_{r=0}^{q-1} \frac{y^{(r+1)}(\tilde{x})}{r!} (x_{s+j} - \tilde{x})^r + \tilde{R}_q(x_{s+j}) = \sum_{r=0}^{q-1} \frac{y^{(r+1)}(\tilde{x})}{r!} (jh)^r + \tilde{R}_q$$

$$\tilde{x} = x_s = x_0 + sh = x_{s+j} - jh \qquad\qquad = \sum_{r=1}^{q} \frac{y^{(r)}(\tilde{x})}{(r-1)!} (jh)^{r-1} + \tilde{R}_q$$

$$\Rightarrow \; d_{k+1} = \sum_{j=0}^{m} \left[a_j \left(\sum_{r=0}^{q} \frac{y^{(r)}(\tilde{x})}{r!} (jh)^r + R_{q+1} \right) - h \, b_j \left(\sum_{r=1}^{q} \frac{y^{(r)}(\tilde{x})}{(r-1)!} (jh)^{r-1} + \tilde{R}_q \right) \right]$$

$$d_{k+1} = \sum_{j=0}^{m} \left[a_j \left(\sum_{r=0}^{q} \frac{y^{(r)}(\tilde{x})}{r!} (jh)^r + R_{q+1} \right) - \underbrace{h b_j \left(\sum_{r=1}^{q} \frac{y^{(r)}(\tilde{x})}{(r-1)!} (jh)^{r-1} + \tilde{R}_q \right)}_{b_j \sum_{r=1}^{q} \frac{y^{(r)}(\tilde{x})}{(r-1)!} j^{r-1} h^r + \tilde{R}_q} \right]$$

$$= \sum_{j=0}^{m} \left[\sum_{r=1}^{q} \underbrace{\left[a_j \frac{j^r}{r!} h^r y^{(r)}(\tilde{x}) - b_j \frac{j^{r-1}}{(r-1)!} h^r y^{(r)}(\tilde{x}) \right]}_{\left(a_j \frac{j^r}{r!} - b_j \frac{j^{r-1}}{(r-1)!} \right) h^r y^{(r)}(\tilde{x})} + a_j y(\tilde{x}) + a_j R_{q+1} - h b_j \tilde{R}_q \right]$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{m} a_j \right)}_{=: c_0} y(\tilde{x}) + \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{m} a_j \cdot j - b_j \right)}_{=: c_1} h\, y^{(1)}(\tilde{x}) + \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{m} a_j \frac{j^2}{2!} - b_j \cdot j \right)}_{=: c_2} h^2 y^{(2)}(\tilde{x}) + \dots$$

$$= \sum_{r=0}^{q} c_r h^r y^{(r)}(\tilde{x}) + R$$

$$d_{k+1} = \sum_{r=0}^{q} c_r h^r y^{(r)}(\tilde{x}) + R$$

mit $\quad c_0 = \sum_{j=0}^{m} a_j = a_0 + \ldots + a_m$

$$c_1 = \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot j - b_j = (a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + m a_m) - (b_0 + b_1 + \ldots + b_m)$$

$$c_2 = \frac{1}{2}(a_1 + 2^2 a_2 + \ldots + m^2 a_m) - (b_1 + 2b_2 + \ldots + m b_m)$$

$$\vdots$$

$$c_r = \frac{1}{r!}(a_1 + 2^r a_2 + \ldots + m^r a_m) - \frac{1}{(r-1)!}(b_1 + 2^{r-1} b_2 + \ldots + m^{r-1} b_m)$$

für $r = 2, \ldots, q$

(2) Falls $\quad c_0 = \ldots = c_p = 0, \quad c_{p+1} \neq 0$, dann

$$d_{k+1} = \sum_{r=p+1}^{q} c_r y^{(r)}(x) h^r + R, \quad \text{also} \quad \max|d_k| \leq O(h^{p+1})$$

dh Fehlerordnung p

(3) Bsp. $m=2$, explizit ($b_2=0$).

$$\sum_{j=0}^{m} a_j y_{s+j} = h \sum_{j=0}^{m} b_j f(x_{s+j}, y_{s+j}) \quad , \quad s = k-m+1 = k-1$$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad \|$$

$$a_0 y_{k-1} + a_1 y_k + a_2 y_{k+1} \qquad h b_0 \underbrace{f(x_{k-1}, y_{k-1})}_{= f_{k-1}} + h b_1 \underbrace{f(x_k, y_k)}_{f_k}$$

mit $a_2 = 1$: $\quad y_{k+1} = h b_0 f_{k-1} + h b_1 f_k - a_0 y_{k-1} - a_1 y_k$

Wie sind a_0, a_1, b_0, b_1 sinnvoll zu wählen?

Antwort: so, dass die Fehlerordnung hoch ist, z.B. $p=2$.

Also müssen $c_0 = c_1 = c_2 = 0$ sein.

$$0 = c_0 = \sum_{j=0}^{m} a_j = a_0 + a_1 + a_2 = a_0 + a_1 + 1$$

$$0 = c_1 = a_1 + 2a_2 - (b_0 + b_1) = a_1 + 2 - b_0 - b_1$$

$$0 = c_2 = \frac{1}{2}(a_1 + 4a_2) - b_1 = \frac{a_1}{2} + 2 - b_1$$

(3) Bsp. $m=2$, explizit ($b_2 = 0$).

mit $a_2 = 1$: $\quad y_{k+1} = h b_0 f_{k-1} + h b_1 f_k - a_0 y_{k-1} - a_1 y_k$

Wie sind a_0, a_1, b_0, b_1 sinnvoll zu wählen?

Antwort: so, dass die Fehlerordnung hoch ist, z.B. $p=2$.

Also müssen $c_0 = c_1 = c_2 = 0$ sein.

$$0 = c_0 = \sum_{j=0}^{m} a_j = a_0 + a_1 + a_2 = a_0 + a_1 + 1$$

$$0 = c_1 = a_1 + 2a_2 - (b_0 + b_1) = a_1 + 2 - b_0 - b_1$$

$$0 = c_2 = \frac{1}{2}(a_1 + 4a_2) - b_1 = \frac{a_1}{2} + 2 - b_1$$

$-1 + 0 + 1 = 0$ ✓

$0 + 2 - 0 - 2 = 0$ ✓

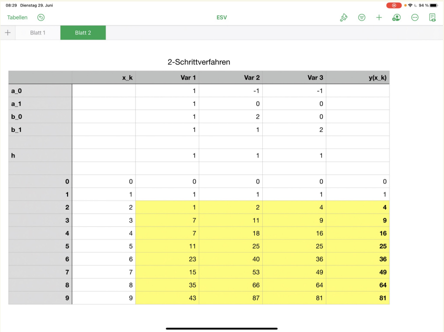
$0 + 2 - 2 = 0$ ✓

Wahl: $a_0 = -1$, $a_1 = 0$, $b_0 = 0$, $b_1 = 2$

Also $\quad y_{k+1} = y_{k-1} + 2h f_k$

oder: $a_0 = -3$, $a_1 = 2$, $b_0 = 1$, $b_1 = 3$

oder: $a_0 = -5$, $a_1 = 4$, $b_0 = 2$, $b_1 = 4$ (falls zusätzlich $c_3 = 0$: Fehlerordnung 3, eind. Lsg.)



08:29 Dienstag 29. Juni

Tabellen | ESV

Blatt 1 | Blatt 2

2-Schrittverfahren

	x_k	Var 1	Var 2	Var 3	y(x_k)
a_0		1	-1	-1	
a_1		1	0	0	
b_0		1	2	0	
b_1		1	1	2	
h		1	1	1	
0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1
2	2	1	2	4	**4**
3	3	7	11	9	**9**
4	4	7	18	16	**16**
5	5	11	25	25	**25**
6	6	23	40	36	**36**
7	7	15	53	49	**49**
8	8	35	66	64	**64**
9	9	43	87	81	**81**

$$y_{k+1} = hb_0 f_{k-1} + hb_1 f_k - a_0 y_{k-1} - a_1 y_k \,, \qquad f_k := f(x_k, y_k)$$

Wahl von b_0, b_1, a_0, a_1 ?

Testfkt.: $f(x,y) = x^2 + 2x - y$ Lsg. von $y' = f(x,y),\ y(0) = 0$: $y(x) = x^2$

$$\boxed{\text{MSV: konsistent \& nullstabil} \Rightarrow y_k \to y(x_k) \text{ für } h \to 0}$$

Fehlerordnung $p \geq 1$, also $\max |d_k| \leq C h^{p+1}$

Ansatz: $$d_{k+1} = \sum_{j=0}^{m} a_j \underbrace{y(x_{s+j})}_{\sum_{r=0}^{q} \frac{y^{(r)}(\tilde{x})}{r!} j^r h^r + R} - h b_j \underbrace{f(x_{s+j}, y(x_{s+j}))}_{= y'(x_{s+j}) = \sum_{r=1}^{q} \frac{y^{(r)}(\tilde{x})}{(r-1)!} j^{r-1} h^{r-1} + \tilde{R}} = \sum_{r=0}^{q} c_r y^{(r)}(\tilde{x}) h^r + R'$$

$c_0 = \dots = c_p = 0$, $c_{p+1} \neq 0$ $\Rightarrow$ Fehlerordnung p $(q \geq p+1)$

im obigen Bsp.:
($a_2 = 1$, $b_2 = 0$)

a_0	-1	-3	-5
a_1	0	2	4
b_0	0	1	2
b_1	2	3	4
p	2	2	3

2.29 Nullstabilität:

(1) char. Polynome: $\rho(z) = \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot z^j$, $\sigma(z) = \sum_{j=0}^{m} b_j \cdot z^j$

für MSV $\sum_{j=0}^{m} a_j y_{s+j} = h \sum_{j=0}^{m} b_j f(x_{s+j}, y_{s+j})$ $s = k-m+1$

(2) nullstabil: $\rho(z) = 0 \Rightarrow |z| \leq 1$ Dahlquistsche Wurzelbedingung

(D-stabil) $\rho(z) = 0, |z| = 1 \Rightarrow z$ einfache Nst.

(3) ESV $(m=1)$: $a_0 = -1, a_1 = 1$, d.h. $y_{k+1} = y_k + h b_0 f_k + h b_1 f_{k+1}$

$\rho(z) = z - 1$ $\rightsquigarrow$ alle ESV sind nullstabil

(4) im obigen Bsp: $\begin{pmatrix} a_2 = 1 \\ b_2 = 0 \end{pmatrix}$

a_0	-1	-3	-5
a_1	0	2	4
b_0	0	1	2
b_1	2	3	4
$\rho(z)$	$z^2 - 1$	$z^2 + 2z - 3$	$z^2 + 4z - 5$
Nstn	$1, -1$	$1, -3$	$1, -5$
nullstabil	✓	✗	✗

27.7.2024

(1) char. Polynome: $\varrho(z) = \sum_{j=0}^{m} a_j z^j$, $\sigma(z) = \sum_{j=0}^{m} b_j z^j$

für MSV $\sum_{j=0}^{m} a_j y_{s+j} = h \sum_{j=0}^{m} b_j f(x_{s+j}, y_{s+j})$ $\quad s = k-m+1$

(2) nullstabil: $\varrho(z) = 0 \Rightarrow |z| \le 1$ Dahlquistsche Wurzelbedingung

(D-stabil) $\varrho(z) = 0$, $|z| = 1 \Rightarrow z$ einfache Nst.

MSV konsistent & nullstabil $\Rightarrow$ MSV konvergent (d.h. $y_k \to y(x_k)$ für $h \to 0$)

(3) ESV $(m=1)$: $a_0 = -1$, $a_1 = 1$, d.h. $y_{k+1} = y_k + h b_0 f_k + h b_1 f_{k+1}$

$\varrho(z) = z - 1$ $\rightsquigarrow$ alle ESV sind nullstabil

(4) Bsp. von letztem Mal, $m=2$

$\begin{pmatrix} a_2 = 1 \\ b_2 = 0 \end{pmatrix}$

$y_{k+1} = h b_0 f_{k-1} + h b_1 f_k - a_0 y_{k-1} - a_1 y_k$

	Var 1	Var 2	Var 3
a_0	-1	-3	-5
a_1	0	2	4
b_0	0	1	2
b_1	2	3	4
$\varrho(z)$	$z^2 - 1$	$z^2 + 2z - 3$	$z^2 + 4z - 5$
Nstn	$1, -1$	$1, -3$	$1, -5$
nullstabil	✓	✗	✗

(5) Wieso Nullstabilität?

Betrachte Test-DGL $\quad y' = \lambda y \; , \; y(0) = 1 \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R} \; , \; \lambda < 0$

also $\quad f(x,y) = \lambda y \quad$ in $\quad y' = f(x,y)$

(kenne Lsg: $\quad y(x) = e^{\lambda x} \qquad [\, y'(x) = \lambda e^{\lambda x} = \lambda y(x) \,]$)

(6) betrachte MSV wie oben:

$$y_{k+1} = h b_0 f_{k-1} + h b_1 f_k - a_0 y_{k-1} - a_1 y_k$$

mit

a_0	-5
a_1	4
b_0	2
b_1	4

(Var 3) $\qquad f_k = f(x_k, y_k) = \lambda y_k$

$f_{k-1} = \lambda y_{k-1}$

Also:

$$y_{k+1} = 2h\lambda y_{k-1} + 4h\lambda y_k + 5 y_{k-1} - 4 y_k$$

$$= \underbrace{(2h\lambda + 5)}_{\alpha} y_{k-1} + \underbrace{(4h\lambda - 4)}_{\beta} y_k$$

Nullstabilität heißt „kleine Störung der Anfangswerte sind nicht so schlimm".

Das Bsp. $y_{k+1} = \alpha y_{k-1} + \beta y_k$, $\alpha = 2h\lambda + 5$, $\beta = 4h\lambda - 4$ ist <u>nicht</u> nullstabil

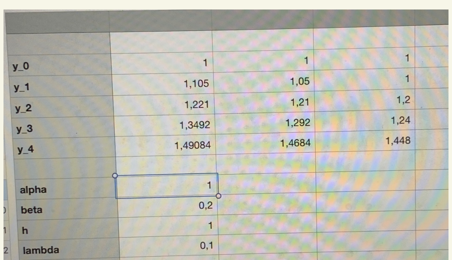
$h=1, \lambda=0{,}1, \alpha=5{,}2, \beta=-3{,}6$. (Var 3)

x_0	0	y_0	1	1	1
x_1	1	y_1	1,105 ($\approx e^{0,1}$)	1,05	1
x_2	2	y_2	1,222	1,42	1,6
x_3	3	y_3	1,346	0,348	-0,56
x_4	4	y_4	1,505	6,131	10,336

(korrekte Werte mit $y(x)=e^{\lambda x}$)

x	$y(x)=e^{\frac{1}{10}x}$
0	1
1	1,105
2	1,221
3	1,349
4	1,491

$h=1, \lambda=0{,}1, \alpha=1, \beta=0{,}2$ nullstabil (Var 1)



y_0	1	1	1
y_1	1,105	1,05	1
y_2	1,221	1,21	1,2
y_3	1,3492	1,292	1,24
y_4	1,49084	1,4684	1,448
alpha	1		
beta	0,2		
h	1		
lambda	0,1		

y_0	1	1	1
y_1	1,105 ($\approx e^{0,1}$)	1,05	1
y_2	1,221	1,21	1,2
y_3	1,349..	1,292	1,24
y_4	1,490...	1,468...	1,448

Absolute Stabilität: („wie ist h zu wählen?")

(1) Betrachte nun wieder $y' = \lambda y$, $y(0) = 1$, lasse aber $\lambda \in \mathbb{C}$ zu

Lsg: $y(x) = e^{\lambda x}$

(2) (a) Falls für ein ESV mit dem Test-AWP aus (1) gilt

$$y_{k+1} = F(h\lambda)\, y_k$$

So heißt $B := \{\mu \in \mathbb{C} \mid |F(\mu)| < 1\}$ „Gebiet der absoluten Stabilität"

(hier konvergiert y_k gut)

(b) Ist $\{\mu \in \mathbb{C} \mid Re(\mu) < 0\} \subseteq B$, so heißt das ESV absolut stabil

(c) Für ein MSV heißt

$$B := \{h\lambda \in \mathbb{C} \mid \varrho(z) - h\lambda\sigma(z) = 0 \implies |z| < 1\}$$

„Gebiet der absoluten Stabilität"

(= gute Wahlen von h)

(3) Betrachte Eulerverfahren $y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k)$ mit $f(x,y) = \lambda y$

Also $y_{k+1} = y_k + h \lambda y_k = F(h\lambda) y_k$, $F(h\lambda) = 1 + h\lambda$

Mit $y(x_{k+1}) = y(x_k + h) = e^{\lambda(x_k + h)} = e^{\lambda h} y(x_k)$

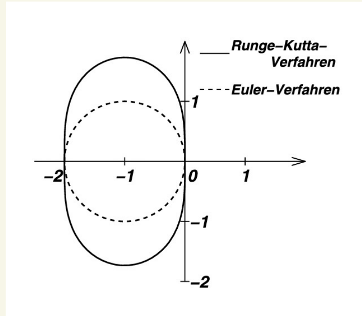
(Lsg. von $y' = f(x,y)$ mit $f(x,y) = \lambda y$ ist $y(x) = e^{\lambda x}$)

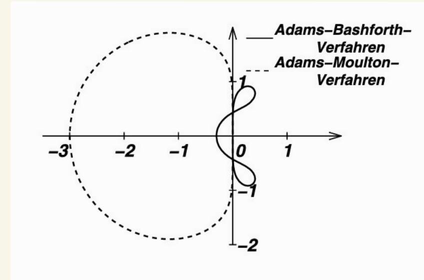
Da nun $e^{\lambda h} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda h)^n}{n!} = 1 + \lambda h + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\lambda h)^n}{n!} = F(h\lambda) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\lambda h)^n}{n!}$,

ist $y(x_{k+1}) = F(h\lambda) y(x_k) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\lambda h)^n}{n!} y(x_k)$

Insofern ist das Verfahren bis auf $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\lambda h)^n}{n!} y(x_k)$ korrekt, also bis auf Fehler der Ordnung $p = 1$

Gebiet der absoluten Stabilität [Bärwolff, 8.3]:





⇝ gutes Kriterium für Bestimmung der Schrittweite

$$y_{k+1} = F(h\lambda)\, y_k$$

Euler: $F(h\lambda) = 1 + h\lambda$

(beispielhaftes) RK: $F(h\lambda) = 1 + h\lambda + h^2 \frac{\lambda^2}{2}$

Methode von Adams-Bashforth (AB-Verfahren), $m = 4$.

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}\left(55 f(x_k, y_k) - 59 f(x_{k-1}, y_{k-1}) + 37 f(x_{k-2}, y_{k-2}) - 9 f(x_{k-3}, y_{k-3})\right)$$

Verbesserung: Adams-Moulton-Methode (AM-Verfahren),

etwa für $m = 3$: $\quad y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}\left(9 f(x_{k+1}, y_{k+1}) + 19 f_k - 5 f_{k-1} + f_{k-2}\right),$

Ordnung $m+1$