



UNIVERSITÄT
DES
SAARLANDES

Fakultät für Mathematik und Informatik

Michael Bildhauer

Elementarkurs zur Funktionentheorie

Sommersemester 2023

Fachrichtung Mathematik
Universität des Saarlandes
Campus E2 4
D-66123 Saarbrücken

▷ Vorlesungsskript nach den zitierten Referenzen

▷ nur zum internen Gebrauch

Kapitel 1

Komplexe Zahlen

1.1 Einführung der komplexen Zahlen

In welchem Sinne ist die Gleichung $x^2 = -1$ lösbar?

Das Studium von Gleichungen 2^{ten} und 3^{ten} Grades führt im 16^{ten} Jahrhundert zur Einführung der komplexen Zahlen und geht u.a. auf Cardano und Bombelli zurück.

Euler etabliert schließlich 1777 die imaginäre Einheit mit dem Symbol i , d.h. es gilt (in gewissem Sinne)

$$i^2 = -1 .$$

Eine Standardanwendung in der Elektrotechnik ist beispielsweise ein komplexer Ansatz zur Beschreibung eines Wechselstromkreises (Frequenz ω) mit Spule (Induktivität L) und Ohmschen Widerstand R in Reihenschaltung, der den komplexen Wechselstromwiderstand (die Impedanz) liefert:

$$R^* = R + i\omega L .$$

Da die Gleichung $x^2 = -1$ auf der „eindimensionalen Zahlengeraden“ nicht lösbar ist, liegt es nahe, als Erweiterung eine Zahlenebene zu betrachten, die die reellen Zahlen als eine Koordinatenachse enthält.

In dieser Zahlenebene muss insbesondere eine neue Multiplikation eingeführt werden, wobei auf der reellen Achse die bekannten Rechenregeln ihre Gültigkeit behalten sollen.

Eine vorläufige Definition.

Ein Paar $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ schreibe man als

$$x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Hier bezeichne i eine Lösung der Gleichung

$$i^2 = -1.$$

Die geometrische Deutung in der sogenannten Gaußschen Zahlenebene folgt in Kürze.

Es heißt x der Realteil und y der Imaginärteil

$$z = x + iy, \quad x =: \operatorname{Re} z, \quad y =: \operatorname{Im} z.$$

Der Realteil und der Imaginärteil einer komplexen Zahl sind wie bei einem geordneten Paar unabhängig voneinander zu betrachten, d.h.

$$x + iy = u + iv \quad \Leftrightarrow \quad x = u \quad \text{und} \quad y = v.$$

In der obigen Schreibweise ist

$$(x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v)$$

und aus $i^2 = -1$ folgt formal

$$(x + iy) \cdot (u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu).$$

Beispiel.

Es ist

$$\frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{1}{5}(2+3i+i^2) = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i.$$

Im obigen Sinne ist die Menge der komplexen Zahlen definiert als

$$\mathbb{C} := \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Mit dem bisher skizzierten Ansatz bleibt jedoch völlig unklar, um welches Objekt es sich bei der imaginären Einheit handeln soll und was die Multiplikation dieses Objektes mit sich selbst ($i^2 = -1$) tatsächlich bedeuten soll.

Nebenbei bemerkt, kann i auch als nicht als DIE Lösung der Gleichung $z^2 = -1$ definiert werden, da $(-i)$ die Gleichung ebenso lösen würde und es könnte noch weitere Lösungen geben.

Was sind komplexe Zahlen tatsächlich?

Man betrachte die Menge \mathbb{R}^2 der Paare (a, b) reeller Zahlen.

Erinnerung.

- i) Der \mathbb{R}^2 ist eine kommutative Gruppe bzgl. der üblichen komponentenweise Addition

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2).$$

- ii) Eine Multiplikation ist definiert mittels

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

iii) Diese Multiplikation ist assoziativ und kommutativ.

iv) Es existiert ein neutrales Element, nämlich $(1, 0)$:

$$(a, b) \cdot (1, 0) = (a, b) .$$

v) Ist $(a, b) \neq (0, 0)$, so ist

$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right)$$

das eindeutig bestimmte multiplikative inverse Element:

$$(a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0) .$$

Zusammen mit dem Distributivgesetz folgt

Definition 1.1. *Der \mathbb{R}^2 mit der oben definierten Addition und Multiplikation ist ein Körper.*

Er heißt der Körper der komplexen Zahlen und wird mit \mathbb{C} bezeichnet.

Bemerkungen

i) Einerseits können die komplexen Zahlen per definitionem mit dem \mathbb{R}^2 identifiziert werden (vgl. Abbildung 1.1 und Abbildung 1.2).

Damit sind insbesondere konvergente Folgen, offene und abgeschlossene Mengen etc. definiert.

Zusätzlich ist eine Multiplikation erklärt, die \mathbb{C} zu einem Körper macht.

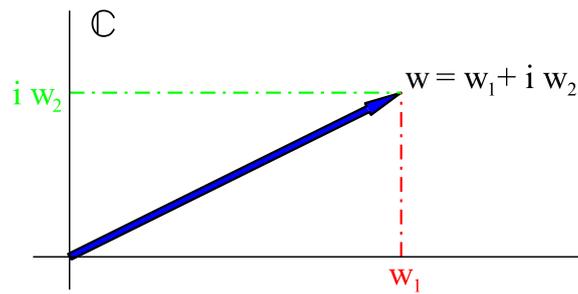


Abbildung 1.1: Die Gaußsche Zahlenebene

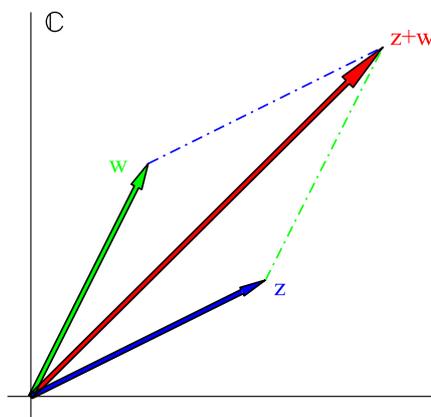


Abbildung 1.2: Kräfteparallelogramm zur Addition komplexer Zahlen

ii) Eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ identifiziert man mit dem Paar $(a, 0) \in \mathbb{C}$,

$$a \cong (a, 0) .$$

Diese Identifikation ist verträglich mit den Multiplikationen in \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} , da für alle $a, c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(a, 0) \cdot (c, 0) = (ac, 0) \cong ac .$$

Damit lässt sich jede komplexe Zahl darstellen in der Form $(a, b \in \mathbb{R})$

$$(a, b) = (a, 0) + \underbrace{(b, 0) \cdot (0, 1)}_{(0, b)} = a + b(0, 1) .$$

Mit der Abkürzung $(0, 1) =: i$ (imaginäre Einheit) gilt folglich

$$(a, b) = a + ib$$

und wegen der Identität

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

ist mit \mathbb{C} ein Körper konstruiert, der den Körper der reellen Zahlen \mathbb{R} enthält und in dem die Gleichung $z^2 = -1$ lösbar ist, nämlich mit i und $-i$ (vgl. Diskussion der Einheitswurzeln in Kapitel 1.3).

Zu beachten ist, dass $i^2 = i \cdot i$ bzgl. der komplexen Multiplikation definiert ist.

iii) Formal wird mit komplexen Zahlen (unter Berücksichtigung von $i^2 = -1$) ebenso gerechnet wie mit reellen (s.o.).

So berechnet man als weiteres Beispiel

$$\frac{1}{i} = \frac{i}{i \cdot i} = \frac{i}{-1} = -i .$$

Bezeichnungen und erste Eigenschaften.

Ohne den Anspruch auf Vollständigkeit sei hier kurz aufgelistet:

i) Komplexe Zahlen werden häufig mit z oder w bezeichnet.

ii) Wie bereits erwähnt, wird z in der Regel als $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, dargestellt.

Es heißt $x =: \operatorname{Re} z$ der Realteil der komplexen Zahl z , $y =: \operatorname{Im} z$ der Imaginärteil.

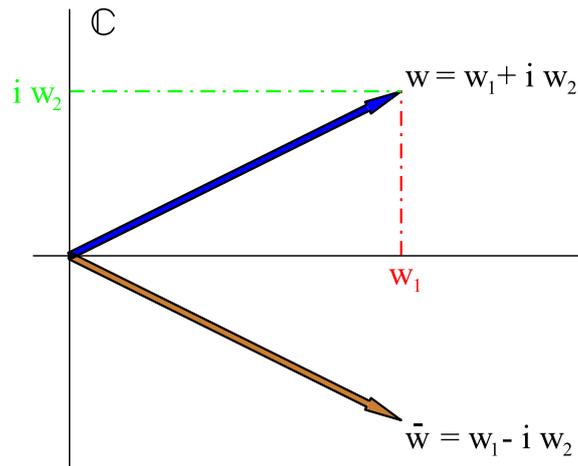


Abbildung 1.3: Zur konjugiert komplexen Zahl.

iii) Die Zahl $\bar{z} := x - iy$ heißt die zu $z = x + iy$ konjugiert komplexe Zahl (vgl. Abbildung 1.3) und hat die Eigenschaft

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}.$$

iv) In Übereinstimmung mit der Euklidischen Norm im \mathbb{R}^2 heißt

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

der Betrag (oder die Norm) der komplexen Zahl $z = x + iy$.

v) Die multiplikativ inverse Zahl berechnet sich zu (s.o.)

$$\frac{1}{z} := z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}, \quad z \neq 0.$$

vi) Die folgenden Rechenregeln sind als Übung leicht zu verifizieren:

$$(a) \quad \bar{\bar{z}} = z, \quad \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w};$$

$$(b) \quad \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z});$$

$$(c) \quad z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z};$$

$$(d) \quad |z| \geq 0, \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0;$$

$$(e) \quad |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|;$$

$$(f) \quad \text{Dreiecksungleichung: } |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

1.2 Potenzreihen im Komplexen

Grob gesprochen kann bis auf eine Ausnahme im Körper der komplexen Zahlen genauso gerechnet werden wie im Reellen.

Die Ausnahme ist: In \mathbb{C} gibt es keine Ordnungsrelation „<“ im Sinne der Axiomatik der reellen Zahlen.

Allerdings ist der Betrag einer komplexen Zahl reell und die Beträge von komplexen Zahlen können mit „<“ verglichen werden.

Mit anderen Worten: $|z| < |w|$ ist auch im Komplexen definiert, wohingegen $z < w$ im Komplexen nicht erklärt ist.

Ersetzt man beispielsweise bei der Diskussion von Grenzwerten die reellen Zahlen \mathbb{R} durch die komplexen Zahlen \mathbb{C} und tauscht man dabei die Betragsfunktion im Reellen gegen die komplexe Betragsfunktion, so bleiben als Merkregel die Definitionen und Sätze gleich, in denen nicht komplexe Zahlen durch „ $<$ “ miteinander verglichen werden müssten.

Beispiele

- i) Die Definition der Konvergenz reeller Zahlenfolgen kann unmittelbar auf den Fall komplexer Zahlenfolgen übertragen werden.
- ii) Die komplexe geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ist konvergent für $|z| < 1$ mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Für $|z| \geq 1$ divergiert die Reihe, wobei auch im Komplexen die Punkte mit $|z| = 1$ gesondert untersucht werden müssen.

- iii) Das Konvergenzkriterium von Leibniz ist nicht auf den komplexen Fall übertragbar.
-

Definition und Konvergenzverhalten komplexer Potenzreihen.

Ebenfalls völlig analog zur reellen Situation ist eine komplexe Potenzreihe eine Reihe der Form

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Die $a_n \in \mathbb{C}$ sind die Koeffizienten, $z_0 \in \mathbb{C}$ heißt der Entwicklungspunkt.

Das komplexe Analogon Konvergenz komplexer Potenzreihen lautet (vgl. Abbildung 1.4):

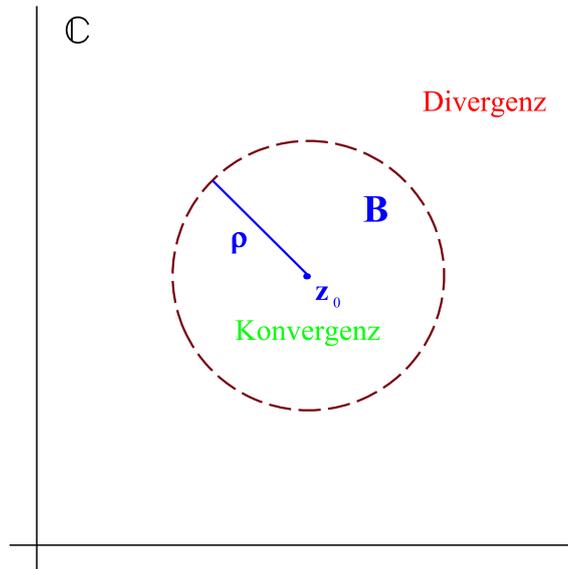


Abbildung 1.4: Zum Konvergenzverhalten einer komplexen Potenzreihe: In der offenen Kreisscheibe liegt Konvergenz vor, der (punktierter) Rand ist genau zu analysieren, außerhalb der abgeschlossenen Kreisscheibe divergiert die Reihe.

Satz 1.2. Zu einem fixierten Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und zu gegebenen Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, sei eine Potenzreihe gegeben:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

Dann gibt es eine reelle Zahl $\rho \geq 0$, sodass:

i) Im Fall $\rho = 0$ konvergiert die Reihe nur im Punkt $z = z_0$, im (formalen) Fall $\rho = \infty$ konvergiert sie für alle $z \in \mathbb{C}$.

ii) Ist $0 < \rho < \infty$, so konvergiert die Potenzreihe punktweise auf

$$B_\rho(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \rho\}.$$

Sie konvergiert absolut gleichmäßig auf jeder Kreisscheibe $B_r(z_0)$ mit $0 < r < \rho$.

iii) Ist $0 < \rho < \infty$, so divergiert die Potenzreihe für alle z aus der Menge

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > \rho\}.$$

iv) Die Zahl ρ heißt der Konvergenzradius der Potenzreihe, $B_\rho(z_0)$ (für $\rho > 0$) heißt der Konvergenzkreis.

v) Mit der formalen Vereinbarung $\frac{1}{0} := \infty$, $\frac{1}{\infty} := 0$ gilt die Formel von Cauchy-Hadamard

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Wie ist \exp im Komplexen definiert?

Die Exponentialfunktion ist im Reellen als die Potenzreihe

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

definiert. Dies soll nun so verallgemeinert werden, dass die Exponentialfunktion auch als Funktion $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert ist, wobei im Spezialfall $z \in \mathbb{R}$ beide Definitionen übereinstimmen sollen.

Da die reelle Exponentialfunktion als Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, zeigt Satz 1.2 die Konvergenz der natürlichen Verallgemeinerung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C},$$

d.h. es ist ein geeigneter Kandidat gefunden.

Die Frage nach anderen möglichen Kandidaten verneint der sogenannte Identitätssatz für Potenzreihen.

Aus diesem folgt u.a., dass zwei Potenzreihen, die auf \mathbb{R} übereinstimmen, notwendigerweise schon gleich sind.

Insbesondere gibt es nur die obige Möglichkeit, die reelle Exponentialfunktion zu einer Potenzreihe $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ fortzusetzen.

Gleiches gilt für die trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus sowie die Hyperbelfunktionen Sinus hyperbolicus und Kosinus hyperbolicus.

Als Funktionen $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ erhält man:

$$\begin{aligned} \exp(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \\ \sin(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \\ \cos(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \\ \sinh(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \\ \cosh(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}. \end{aligned}$$

1.3 Die Gaußsche Zahlenebene

Die komplexen Zahlen sind in Definition 1.1 als reelle Zahlenpaare versehen mit einer Körperstruktur eingeführt, wobei der Begriff Gaußsche Zahlenebene bereits gefallen ist.

Um die Geometrie der Gaußschen Zahlenebene zu verstehen, werden nun mithilfe der Exponentialfunktion Polarkoordinaten diskutiert.

Eulersche Formeln und Polarkoordinaten.

In der Reihendarstellung des Sinus bzw. des Kosinus kann $(-1)^n$ durch $(i^2)^n$ ersetzt werden, d.h.

$$i \sin(z) = i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n}}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (iz)^{2n+1},$$
$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (iz)^{2n}$$

und es gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ (die Summe der Reihen auf der rechten Seite ergibt $\exp(iz)$)

$$\exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z). \quad (1)$$

Ersetzt man weiter in (1) z durch $-z$ und beachtet, dass per definitionem $\cos(-z) = \cos(z)$, $\sin(-z) = -\sin(z)$, so folgt für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\exp(-iz) = \cos(z) - i \sin(z).$$

Zusammen ergeben sich die Eulerschen Formeln

$$\begin{aligned}\cos(z) &= \frac{1}{2} \left(\exp(iz) + \exp(-iz) \right), \\ \sin(z) &= \frac{1}{2i} \left(\exp(iz) - \exp(-iz) \right).\end{aligned}$$

Da die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion auch im Komplexen gilt, folgt unmittelbar

$$\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}. \quad (2)$$

Man beobachtet nun, indem speziell $z = t$, $t \in \mathbb{R}$, in (1) gewählt wird:

$$e^{it} := \exp(it) = \cos(t) + i \sin(t). \quad (3)$$

Identifiziert man komplexe Zahlen wieder mit dem \mathbb{R}^2 , so bedeutet (3)

$$e^{it} \cong \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

d.h. die Funktion $e^{it}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ durchläuft in Abhängigkeit von t die Einheitskreislinie im \mathbb{R}^2 .¹

Folgerung.

Die rechte Seite von (4) als Definition der trigonometrischen Funktionen über Potenzreihen ist mit der elementargeometrischen Definition verträglich.

¹Die Funktionen $\cos(t)$ und $\sin(t)$ sind bisher noch nicht mit den bekannten trigonometrischen Funktionen identifiziert. Tatsächlich liegt aber e^{it} wegen (3) für alle $t \in \mathbb{R}$ auf der Einheitskreislinie und die Periodizität folgt aus $e^{2\pi i} = 1$: Wegen der Funktionalgleichung ist nämlich $e^{z+2k\pi i} = e^z \cdot (e^{2\pi i})^k = e^z$. Für Details sei hier etwa auf [Fo], Kapitel 14 verwiesen.

Ist schließlich $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, so folgt nach (3) aus (1)

$$\exp(z) = \exp(x) \exp(iy) = \exp(x) (\cos(y) + i \sin(y)) . \quad (5)$$

Vorsicht.

- i) Die Darstellung (5) zeigt, dass die komplexe Exponentialfunktion nicht bijektiv sein kann (siehe Fußnote¹).
 - ii) Die Eulerschen Formeln zeigen weiter, dass der komplexe Sinus und der komplexe Kosinus nicht beschränkt sein können.
-

Aus (3) bzw. (4) folgt, dass jede komplexe Zahl $z \neq 0$ geschrieben werden kann als

$$z = r e^{i\varphi} = r (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) , \quad 0 < r , \quad \varphi \in \mathbb{R} .$$

Hierbei ist $r = |z|$ die Länge des blau dargestellten Vektors in Abbildung 1.1 und $\varphi =: \arg z$ der Winkel im Bogenmaß, der mit der reellen Achse eingeschlossen wird.

φ heißt ein (man beachte die Periodizität der reellen trigonometrischen Funktionen) Argument von z .

Mit dieser Darstellung in Polarkoordinaten kann auch die Multiplikation komplexer Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene geometrisch interpretiert werden:

Ist $w = |w| e^{i\varphi}$ und $z = |z| e^{i\psi}$, so gilt

$$wz = |w||z| e^{i(\varphi+\psi)} = |w||z| (\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)) ,$$

d.h. bei der komplexen Multiplikation werden die Beträge multipliziert und die Argumente addiert.

Beispiel.

In Abbildung 1.5 wird

$$z_1 = \frac{1}{2}(1 + i) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\pi/4} \quad (\text{rot symbolisiert})$$

mit der komplexen Zahl

$$z_2 = (-1 + i) = \sqrt{2}e^{i3\pi/4} \quad (\text{grün symbolisiert})$$

multipliziert und das Ergebnis ist (blau dargestellt) die Zahl $-1 = e^{i\pi}$.

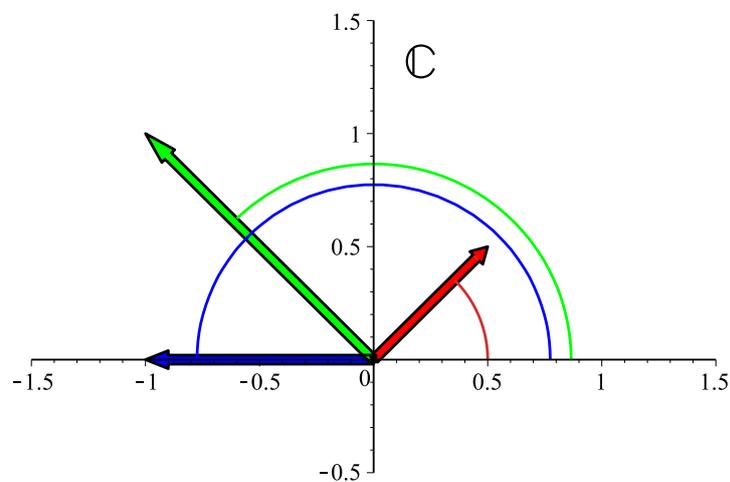


Abbildung 1.5: Zur Multiplikation in der Gaußschen Zahlenebene.

Einheitswurzeln.

Die Gleichung $z^2 = 1$ hat die zwei reellen Lösungen $z_0 = 1$ und $z_1 = -1$ und auch eine komplexe Rechnung liefert keine weiteren Lösungen.

Die Gleichung $z^3 = 1$ wiederum hat im Reellen nur die Lösung $z_0 = 1$.

Hier liefern Polarkoordinaten in der Gaußschen Zahlenebene unmittelbar weitere komplexe Lösungen – sind nämlich

$$z_0 = e^{i0} = 1, \quad z_1 = e^{i(0+\frac{2\pi}{3})}, \quad z_2 = e^{i(0+\frac{4\pi}{3})},$$

so gilt (siehe Abbildung 1.6)

$$z_0^3 = z_1^3 = z_2^3 = 1.$$

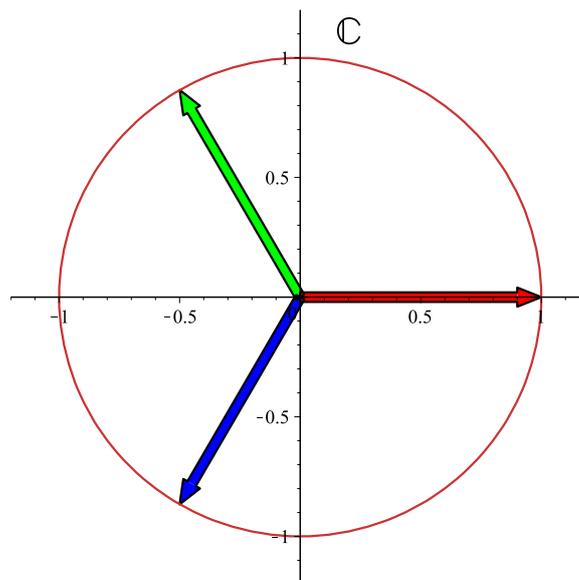


Abbildung 1.6: Die drei Lösungen der Gleichung $z^3 = 1$.

Man beachte, dass die Fortführung

$$z_3 = e^{i(0+\frac{6\pi}{3})} = e^{i(0+2\pi)}, \quad z_4 = e^{i(0+\frac{8\pi}{3})} = e^{i(\frac{2\pi}{3}+2\pi)}, \quad \dots$$

aufgrund der Periodizität von e^{it} wieder auf z_0 , z_1 und z_2 führt. Es

gibt genau diese drei Lösungen.

Allgemein ist festzuhalten: Es gibt genau n verschiedene komplexe Zahlen z_0, \dots, z_{n-1} , die der Gleichung $z^n = 1$ genügen.

Sie heißen Einheitswurzeln und berechnen sich zu

$$z_k = e^{i\frac{2\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Kapitel 2

Einführung in die Funktionentheorie

In der Differentialrechnung von Funktionen $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ mehrerer Veränderlicher ist der Ableitungsbegriff nicht als Verallgemeinerung der eindimensionalen Diskussion evident.

Für Funktionen einer Variablen kann die Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten definiert werden,

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0, x \neq x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Im Fall mehrerer Veränderlicher ist das nicht möglich, da nicht „durch einen Vektor geteilt werden kann“. Deshalb sind partielle Ableitungen, Richtungsableitungen und die totale Ableitung zu unterscheiden.

Diese Problematik ändert sich zunächst nicht, wenn Abbildungen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zu untersuchen sind.

Die Situation ändert sich erst dann dramatisch, wenn der \mathbb{R}^2 als Gaußsche Zahlenebene mit der komplexen Multiplikation versehen wird, d.h. beim Studium von Abbildungen $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Bzgl. der komplexen Multiplikation existiert ein Inverses, „durch komplexe Zahlen kann geteilt werden“. Damit ist es möglich analog zum eindimensionalen Fall eine Ableitung als Grenzwert von Differenzenquotienten zu definieren.

In der Funktionentheorie geht es um die (auf den ersten Blick) wirklich erstaunlichen Konsequenzen dieser Tatsache, die kein Analogon in der reellen Analysis haben.

2.1 Holomorphe Funktionen

In diesem Paragraphen wird die komplexe Differenzierbarkeit als zentraler Begriff in der Funktionentheorie eingeführt.

Die Notation ist dabei wie üblich: $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f: \mathbb{C} \supset U \rightarrow f(U) \subset \mathbb{C}, \quad f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

mit reellwertigen Funktionen $u(x, y), v(x, y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Die Menge $U \subset \mathbb{C}$ sei im Folgenden stets offen.

Die skizzenhafte Veranschaulichung ist in Abbildung 2.1 wiedergegeben.

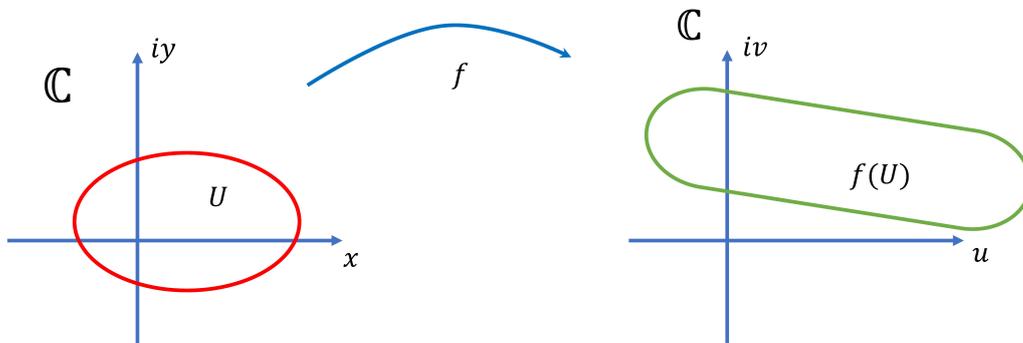


Abbildung 2.1: Eine Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Wie oben angedeutet, kann die komplexe Differenzierbarkeit über den Grenzwert des Differenzenquotienten eingeführt werden.

Definition 2.1. i) Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$.

Die Funktion f heißt im Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ (komplex) differenzierbar, falls der Grenzwert (die (komplexe) Ableitung $f'(z_0)$)

$$\lim_{z \rightarrow z_0, z \neq z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert (in \mathbb{C}).

ii) Die Funktion f heißt (komplex) differenzierbar auf U (oder: holomorph auf U , oder: regulär auf U), falls f in jedem Punkt $z_0 \in U$ differenzierbar ist.

Wie üblich kann in diesem Fall die komplexe Ableitung als Funktion $f': U \rightarrow \mathbb{C}$ aufgefasst werden.

Notation:

$$\lim_{z \rightarrow z_0, z \neq z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0) = \frac{df}{dz}|_{z=z_0} .$$

Bemerkungen.

i) Die Definition der Ableitung erfolgt analog zum Fall einer Funktion einer reellen Variablen als Grenzwert von Differenzenquotienten.

Fasst man f lediglich als Funktion $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ auf (ohne komplexe Multiplikation), so ergibt eine solche Definition keinen Sinn.

ii) Rekursiv werden höhere Ableitungen definiert:

$$f'' := (f')' , \quad f''' := (f'')' \quad \dots , \quad f^{(n)} := (f^{(n-1)})' .$$

iii) Eine in z_0 komplex differenzierbare Funktion ist dort stetig.

Beispiele.

i) Konstante Funktionen sind holomorph auf \mathbb{C} . Ist nämlich

$$f(z) = c = a + ib, \quad c \in \mathbb{C}, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

so folgt für $z \neq z_0$

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = 0, \quad \text{also} \quad \lim_{z \rightarrow z_0, z \neq z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) = 0.$$

ii) Es sei $f(z) = z$ und ein beliebiges $z_0 \in \mathbb{C}$ sei fixiert. Es folgt

$$\lim_{z \rightarrow z_0, z \neq z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0, z \neq z_0} \frac{z - z_0}{z - z_0} = 1,$$

also $f'(z_0) = 1$ für alle $z_0 \in \mathbb{C}$, d.h. $f'(z) \equiv 1$.

iii) Hier sei $f(z) = \bar{z}$ und $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ fixiert. Ist speziell $z = x + iy_0$, so folgt

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{(x - iy_0) - (x_0 - iy_0)}{(x + iy_0) - (x_0 + iy_0)} = 1.$$

Ist andererseits $z = x_0 + iy$, so folgt

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{(x_0 - iy) - (x_0 - iy_0)}{(x_0 + iy) - (x_0 + iy_0)} = -1.$$

Die Funktion $f(z) = \bar{z}$ ist folglich nicht holomorph.

Nach dem letzten Beispiel ist die Klasse der holomorphen Funktionen nicht so groß wie man es zunächst vielleicht erwartet hätte. Um einzusehen (ohne die Definition heranzuziehen), dass zumindest Polynome etc. holomorph sind, werden wie üblich Rechenregeln benötigt:

Satz 2.2. *Es seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offen.*

i) Summe und Produkt zweier (in $z_0 \in U$) komplex differenzierbarer Funktionen f, g sind komplex differenzierbar. Es gilt

$$(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0) ,$$

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0) .$$

ii) Es sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ in z_0 komplex differenzierbar und $f(z_0) \neq 0$. Dann ist $\frac{1}{f}$ in einer Umgebung von z_0 wohl definiert, in z_0 komplex differenzierbar und es gilt

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = -\frac{f'(z_0)}{f^2(z_0)} .$$

iii) Es seien $f: U \rightarrow V$ und $g: V \rightarrow \mathbb{C}$ in $z_0 \in U$ bzw. in $w_0 = f(z_0)$ komplex differenzierbar. Dann ist die Verkettung $g \circ f$ in z_0 komplex differenzierbar mit

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(w_0)f'(z_0) .$$

Beispiele.

i) Es sei $f(z) = z^2$. Dann gilt

$$f'(z) = 1z + z1 = 2z .$$

Induktiv folgt für $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1} .$$

ii) Es sei $f(z) = \frac{1}{z}$, $z \neq 0$. Dann gilt

$$f'(z) = -\frac{1}{z^2} .$$

Für $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ($z \neq 0$ im Fall $k < 0$) folgt

$$\frac{d}{dz} z^k = k z^{k-1} .$$

Ruft man sich die Notation

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) , \quad z = x + iy ,$$

mit zwei Funktionen $u, v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ins Gedächtnis, so stellt sich an dieser Stelle die natürliche Frage:

Wie hängt die reelle Differenzierbarkeit von u und v mit der komplexen Differenzierbarkeit von f zusammen?

Im Zusammenhang mit dieser Frage sei daran erinnert, dass die Funktion $f(z) = \bar{z} = x + i(-y)$ nicht komplex differenzierbar ist, obwohl in diesem Fall u, v beliebig glatt sind.

2.2 Die Cauchy- Riemannsches Differentialgleichungen

Zur Beantwortung obiger Frage wird die zusätzliche Notation eingeführt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= u_x , & \frac{\partial u}{\partial y} &= u_y , \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= v_x , & \frac{\partial v}{\partial y} &= v_y . \end{aligned}$$

Heuristische Idee. Es sei f als Funktion $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ differenzierbar. Man schreibt dementsprechend auch

$$f(z) = f(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} .$$

Die Diskussion differenzierbarer Funktionen in mehreren Veränderlichen zeigt mit der Notation

$$f_x = \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f_y = \begin{pmatrix} u_y \\ v_y \end{pmatrix}$$

für fixiertes $z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ die Entwicklung („Approximation erster Ordnung“)

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}(z_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \dots \\ &= f(z_0) + f_x(z_0)(x - x_0) + f_y(z_0)(y - y_0) + \dots \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \frac{1}{2}((z - z_0) + \overline{(z - z_0)}) , \\ y - y_0 &= -\frac{i}{2}((z - z_0) - \overline{(z - z_0)}) \end{aligned}$$

folgt daraus

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + \frac{1}{2}f_x(z_0)((z - z_0) + \overline{(z - z_0)}) \\ &\quad - \frac{i}{2}f_y(z_0)((z - z_0) - \overline{(z - z_0)}) + \dots \\ &= f(z_0) + (z - z_0) \left[\frac{1}{2}(f_x(z_0) - if_y(z_0)) \right] \\ &\quad + \overline{(z - z_0)} \left[\frac{1}{2}(f_x(z_0) + if_y(z_0)) \right] + \dots \end{aligned} \quad (1)$$

Ist andererseits f komplex differenzierbar, so muss gelten

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \dots$$

Der Vergleich mit (1) zeigt

$$f'(z_0) = \frac{1}{2} [f_x(z_0) - if_y(z_0)] , \quad (2)$$

$$0 = f_x(z_0) + if_y(z_0) . \quad (3)$$

Die Formel (2) stellt die komplexe Ableitung in Termen der reellen partiellen Ableitungen dar.

Die Gleichungen (3) heißen die Cauchy- Riemannsches Differentialgleichungen. Wegen

$$\begin{aligned} f_x + if_y &= (u_x + iv_x) + i(u_y + iv_y) \\ &= (u_x - v_y) + i(v_x + u_y) \end{aligned}$$

schreibt man sie in der Form

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x. \quad (4)$$

Tatsächlich kann aus der heuristischen Idee ein präziser Beweis gemacht werden und es folgt:

Satz 2.3. *Für eine Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$ offen sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

i) *f ist in $z_0 \in U$ komplex differenzierbar.*

ii) *f ist in $z_0 \in U$ reell differenzierbar und es gelten die Cauchy-Riemannsches Differentialgleichungen (4).*

Beispiele.

i) Es sei

$$\begin{aligned} f(z) &= 2i + 3z + 4z^2 \\ &= \underbrace{3x + 4x^2 - 4y^2}_{=u(x,y)} + i \underbrace{(2 + 3y + 8xy)}_{=v(x,y)}. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$u_x = 3 + 8x = v_y ,$$

$$u_y = -8y = -v_x .$$

Die Cauchy- Riemannsches Differentialgleichung sind also erfüllt und folglich ist f komplex differenzierbar.

ii) Es sei

$$f(z) = \bar{z} = x + i(-y) .$$

Hier gilt

$$u_x = 1 \neq -1 = v_y .$$

Die Cauchy- Riemannsches Differentialgleichungen sind in diesem Beispiel nicht erfüllt und f ist wie bereits bekannt nicht komplex differenzierbar.

iii) Es sei $f(z) = \operatorname{Re} z$. Auch hier können die Cauchy- Riemannsches Differentialgleichungen nicht gelten.

2.3 Kurvenintegrale (Das komplexe Integral)

Nahezu alle folgenden Betrachtungen und Aussagen beruhen auf dem Studium von Kurvenintegralen (Wegintegralen).

Im \mathbb{R}^n versteht man unter einer (differenzierbaren) Kurve eine (differenzierbare) Abbildung $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall bezeichne.

Ist γ stetig auf $I = [a, b]$ und existiert $\gamma'(t)$ bis auf höchstens endlich viele Ausnahmen, so heißt γ stückweise glatt.

Identifiziert man die komplexe Ebene mit dem \mathbb{R}^2 , $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, so überträgt sich die Diskussion von Kurven im \mathbb{R}^2 direkt auf Kurven in

der komplexen Ebene \mathbb{C} .

Notation.

- i) Mit $\dot{\gamma}$ wird im Folgenden die Ableitung einer Kurve in \mathbb{C} nach dem reellen Parameter (der Zeit) bezeichnet. Ist also

$$\gamma : I = [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = \varphi(t) + i\psi(t) \cong \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix},$$

so ist

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d\gamma}{dt}(t) = \dot{\varphi}(t) + i\dot{\psi}(t) \cong \begin{pmatrix} \dot{\varphi}(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{pmatrix}.$$

- ii) Eine stückweise glatte Kurve $\gamma: [a, b] \rightarrow U \subset \mathbb{C}$ heißt im Folgenden ein Integrationsweg in $U \subset \mathbb{C}$.

- iii) Für stetiges $\xi: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist

$$\int_a^b \xi(t) dt := \int_a^b \operatorname{Re} \xi(t) dt + i \int_a^b \operatorname{Im} \xi(t) dt.$$

Mit dieser Notation kann das (komplexe) Kurvenintegral eingeführt werden.

Definition 2.4. *Es sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein Integrationsweg und $f: \gamma(I) \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion.*

Dann ist das (komplexe) Kurvenintegral (Wegintegral) längs γ definiert als

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt.$$

Bemerkungen.

- i) Die Bildung des komplexen Integrals erfolgt analog zu der des reellen Kurvenintegrals, wobei das Skalarprodukt durch die komplexe Multiplikation zu ersetzen ist.
- ii) Die Invarianz unter orientierungserhaltenden Parametertransformationen und der Vorzeichenwechsel bei orientierungsumkehrenden Parametertransformationen sind genau wie im reellen Fall zu zeigen.

Dementsprechend kann wieder von Wegen gesprochen werden. Auf die genaue Unterscheidung wird im Folgenden jedoch wie üblich nicht immer eingegangen.

- iii) Es gelten die bekannten Rechenregeln, beispielsweise

$$\left| \int_{\gamma} f(z) \, dz \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\dot{\gamma}(t)| \, dt ,$$
$$\int_{\gamma} (f(z) + g(z)) \, dz = \int_{\gamma} f(z) \, dz + \int_{\gamma} g(z) \, dz ,$$
$$\int_{\gamma} (\lambda f)(z) \, dz = \lambda \int_{\gamma} f(z) \, dz , \quad \lambda \in \mathbb{C} .$$

Diese Regeln können unmittelbar anhand der Definition verifiziert werden.

iv) Ist $\gamma(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, so gilt

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma} f(z) \, dz \\ &= \int_a^b [u(\varphi(t), \psi(t)) + iv(\varphi(t), \psi(t))] [\dot{\varphi}(t) + i\dot{\psi}(t)] \, dt \\ &= \int_a^b [u(\varphi(t), \psi(t))\dot{\varphi}(t) - v(\varphi(t), \psi(t))\dot{\psi}(t)] \, dt \\ & \quad + i \int_a^b [v(\varphi(t), \psi(t))\dot{\varphi}(t) + u(\varphi(t), \psi(t))\dot{\psi}(t)] \, dt . \end{aligned}$$

Beispiele.

i) Es seien $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ fixiert. Man betrachte den Integrationsweg (positiv orientierte Kreislinie, vgl. Abbildung 2.2)

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto z_0 + re^{it} .$$

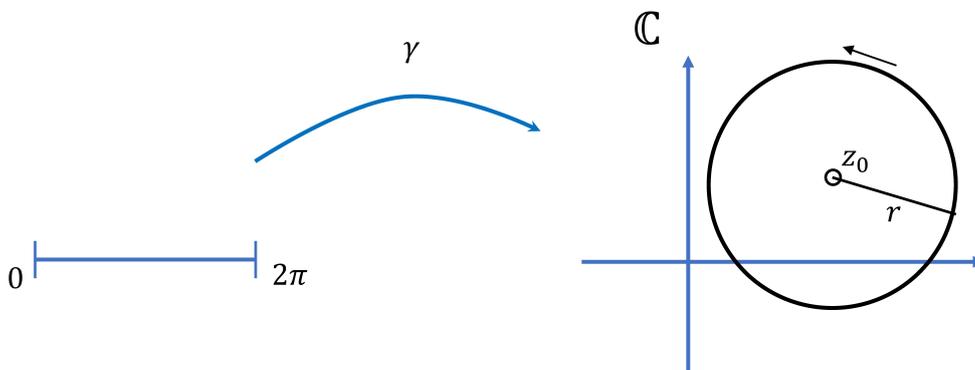


Abbildung 2.2: Eine positiv orientierte Kreislinie.

Es gilt

$$\gamma(t) = z_0 + r(\cos(t) + i \sin(t)) ,$$

$$\dot{\gamma}(t) = -r \sin(t) + ir \cos(t) = ire^{it} .$$

ii) Es sei $f(z) = |z|$ (insbesondere ist f nicht holomorph). Betrachtet sei zunächst der Integrationsweg (vgl. Abbildung 2.3)

$$\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto e^{i(\pi-t)}.$$

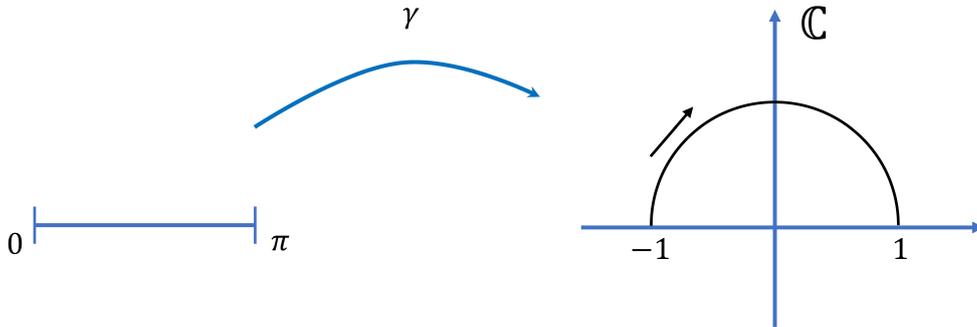


Abbildung 2.3: Der Integrationsweg γ aus Beispiel ii.).

Mit der Notation $\gamma = \varphi + i\psi$ folgt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für Funktionen einer reellen Veränderlichen

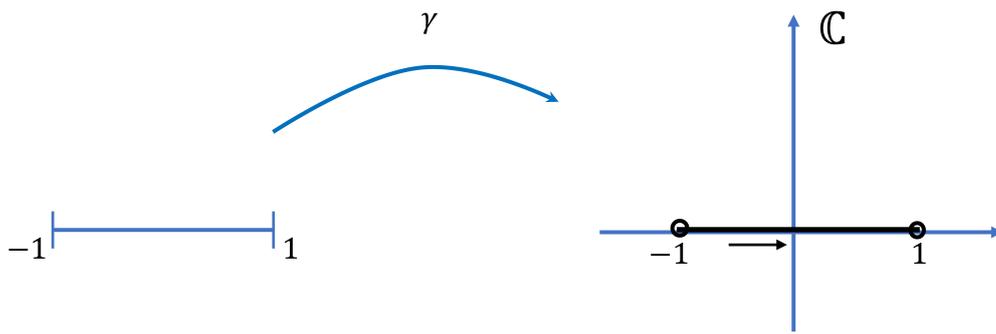
$$\begin{aligned} \int_{\gamma} |z| dz &= \int_0^{\pi} 1 \dot{\gamma}(t) dt \\ &= \int_0^{\pi} \dot{\varphi}(t) dt + i \int_0^{\pi} \dot{\psi}(t) dt \\ &= \varphi(\pi) - \varphi(0) + i(\psi(\pi) - \psi(0)) \\ &= \gamma(\pi) - \gamma(0) = 2. \end{aligned}$$

Betrachtet sei jetzt der Integrationsweg

$$\tilde{\gamma} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto t.$$

Hier gilt

$$\int_{\tilde{\gamma}} |z| dz = \int_{-1}^1 |t| dt = 1 \neq \int_{\gamma} |z| dz.$$

Abbildung 2.4: Der Integrationsweg $\tilde{\gamma}$ aus Beispiel ii.).**Beobachtung.**

Kurvenintegrale hängen i.A. nicht nur vom Anfangs- und Endpunkt des Integrationsweges ab.

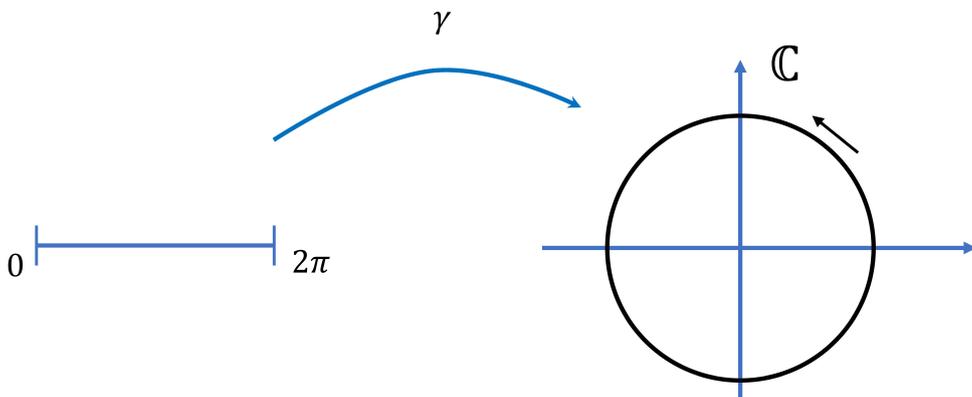
Das wichtigste Beispiel.

Abbildung 2.5: Zu Satz 2.5.

Satz 2.5. Es seien $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ fixiert und

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto z_0 + re^{it}.$$

Dann gilt

$$\int_{\gamma} (z - z_0)^k dz = \begin{cases} 0 & \text{für } k \in \mathbb{Z} - \{-1\}, \\ 2\pi i & \text{für } k = -1. \end{cases}$$

Beweis. O.E. sei $z_0 = 0$. Es ist

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z^k dz &= \int_0^{2\pi} r^k e^{ikt} i r e^{it} dt \\ &= ir^{k+1} \int_0^{2\pi} e^{i(k+1)t} dt. \end{aligned} \tag{5}$$

Für $k = -1$ berechnet man

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = i \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi i.$$

Ist $k \neq -1$, so beachtet man

$$\frac{d}{dt} e^{i(k+1)t} = i(k+1)e^{i(k+1)t} \Rightarrow e^{i(k+1)t} = \frac{1}{i(k+1)} \frac{d}{dt} e^{i(k+1)t}.$$

Eingesetzt in (5) ergibt dies

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z^k dz &= ir^{k+1} \frac{1}{i(k+1)} \int_0^{2\pi} \frac{d}{dt} e^{i(k+1)t} dt \\ &= \frac{r^{k+1}}{k+1} e^{i(k+1)t} \Big|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

□

Interpretation der Formel.

- i) Für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ist die Abbildung $z \mapsto z^k$ auf \mathbb{C} holomorph mit der Stammfunktion (siehe Definition 2.6)

$$z \mapsto \frac{1}{k+1} z^{k+1}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Deshalb verschwindet das Umlaufintegral in diesem Fall.

- ii) Für $k = -1$ ist die Abbildung $z \mapsto z^k = z^{-1}$ „singulär in 0“ im Sinne von „dort nicht definiert aber sonst holomorph“, das Umlaufintegral kann aber nicht im Sinne der ersten Gleichung von (6) als Integral über eine entsprechende Ableitung geschrieben werden.

Präziser ausgedrückt hat die Abbildung $z \mapsto 1/z$ keine Stammfunktion auf $\mathbb{C} - \{0\}$. Das Umlaufintegral verschwindet in diesem Fall nicht.

- iii) Für $k = -2, -3, \dots$ ist die Abbildung $z \mapsto z^k$ im obigen Sinne ebenfalls singulär (und intuitiv deutlich schlimmer als $1/z$), es existiert jedoch eine Stammfunktion auf $\mathbb{C} - \{0\}$ und das Umlaufintegral verschwindet.

Es stellt sich die Frage nach dem prinzipiellen Zusammenhang zwischen der Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals und der Existenz von Stammfunktionen.

Definition 2.6. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig.*

*Eine Funktion $F: U \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **Stammfunktion** von f , falls F holomorph ist und $F' = f$ gilt.*

Für die folgenden Betrachtungen sei eine Art Kettenregel für Kurven in der komplexen Ebene vorausgeschickt. Man beachte den Unterschied zu Satz 2.2, *iii*). \square

Proposition 2.7. *Es sei $F: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph auf der offenen Menge U und $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ eine glatte Kurve in U .*

Dann gilt

$$\frac{d}{dt}F(\gamma(t)) = F'(\gamma(t))\dot{\gamma}(t).$$

Es sei betont, dass F' die komplexe Ableitung bezeichnet, wohingegen d/dt und $\dot{\gamma}$ Ableitungen nach der reellen Variablen t bezeichnen.

Beweis der Proposition. Nach Formel (2) aus Kapitel 2.2 ist ($F = u(x, y) + iv(x, y)$)

$$F' = \frac{1}{2} \left[(u_x + iv_x) - i(u_y + iv_y) \right] = \frac{1}{2} \left[(u_x + v_y) + i(v_x - u_y) \right].$$

Es folgt

$$\begin{aligned} F'(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) &= \frac{1}{2} \left\{ [(u_x + v_y)\dot{\gamma}_1 - (v_x - u_y)\dot{\gamma}_2] \right. \\ &\quad \left. + i[(u_x + v_y)\dot{\gamma}_2 + (v_x - u_y)\dot{\gamma}_1] \right\} \\ &= [u_x\dot{\gamma}_1 + u_y\dot{\gamma}_2] + i[v_y\dot{\gamma}_2 + v_x\dot{\gamma}_1], \end{aligned}$$

wobei die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen ausgenutzt wurden und wobei die Ableitungen von u und v an der Stelle $\gamma(t)$ auszuwerten sind.

Andererseits ist nach der (reellen) Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F(\gamma(t)) &= \frac{d}{dt} [u(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) + iv(\gamma_1(t), \gamma_2(t))] \\ &= [u_x\dot{\gamma}_1 + u_y\dot{\gamma}_2] + i[v_x\dot{\gamma}_1 + v_y\dot{\gamma}_2] \end{aligned}$$

und die Proposition ist bewiesen. \square

Mit Proposition 2.7 kann zunächst die Frage nach der Eindeutigkeit von Stammfunktionen geklärt werden.

Es heißt $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, falls $G \neq \emptyset$ offen ist und sich jeweils zwei Punkte aus G durch eine Kurve in G verbinden lassen (vgl. Abbildung 2.6).

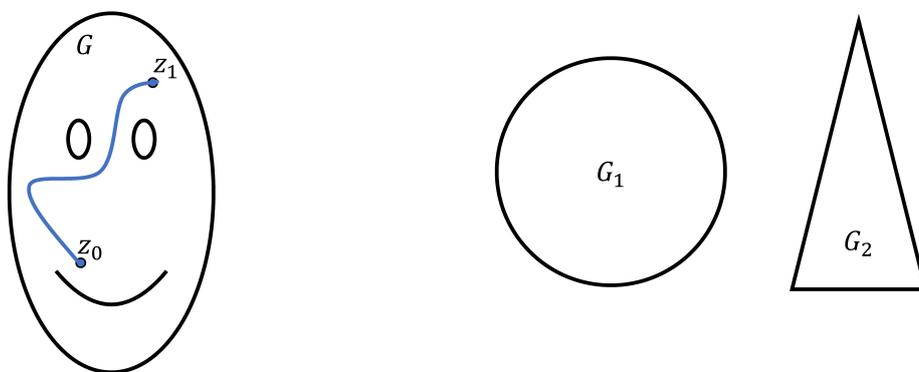


Abbildung 2.6: G ist ein Gebiet, die Menge $M := G_1 \cup G_2$ ist kein Gebiet.

Sind auf einem Gebiet zwei Funktionen $F, \tilde{F}: G \rightarrow \mathbb{C}$ Stammfunktion derselben Funktion $f: G \rightarrow \mathbb{C}$, so fixiere man einen Punkt $z_0 \in G$ und ein beliebiges $z \in G$ sei über $\gamma: [0, 1] \rightarrow G$ mit z_0 verbunden, sodass $\gamma(0) = z_0$ und $\gamma(1) = z$.

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und Proposition 2.7 gilt

$$\begin{aligned} \tilde{F}(z) - F(z) - [\tilde{F}(z_0) - F(z_0)] &= \int_0^1 \frac{d}{dt} [(\tilde{F} - F)(\gamma(t))] dt \\ &= \int_0^1 [\tilde{F} - F]'(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Es folgt für alle $z \in G$

$$\tilde{F}(z) = F(z) + \tilde{F}(z_0) - F(z_0) ,$$

d.h. auf Gebieten sind Stammfunktionen, sofern sie existieren, eindeutig bestimmt bis auf Konstanten.

Ist G kein Gebiet (wie etwa die Menge M in Abbildung 2.6), so überlegt man sich leicht, dass Stammfunktionen nicht eindeutig bis auf Konstanten sein müssen.

Mithilfe von Proposition 2.7 wird auch der erste zentrale Satz dieses Paragraphen gezeigt:

Satz 2.8. *i) Es sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die eine Stammfunktion F besitze. $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ sei ein Integrationsweg in U von $\gamma(a) = z_0$ nach $\gamma(b) = z_1$.*

Dann ist

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = F(z_1) - F(z_0) .$$

ii) Ist insbesondere γ geschlossen ($z_0 = z_1$), so folgt

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = 0 .$$

Beweis. Man betrachte einen Integrationsweg γ wie im ersten Teil des Satzes. Es ist F Stammfunktion von f und per definitionem gilt

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) \, dt = \int_a^b F'(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) \, dt .$$

Proposition 2.7 liefert

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = \int_a^b \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) \, dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) .$$

Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen. Der zweite Teil folgt als Spezialfall. \square

Es gilt auch die Umkehrung von Satz 2.8 im Sinne von

Satz 2.9. *Es sei f auf einem Gebiet G stetig. Für jeden geschlossenen Integrationsweg γ in G gelte*

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = 0 .$$

Dann hat f auf G eine Stammfunktion.

Der Beweis von Satz 2.9 beruht auf der Tatsache, dass auf einem Gebiet gesetzt werden kann

$$F(z) := \int_{\gamma} f(w) \, dw ,$$

wobei der Integrationsweg γ einen fixierten Punkt $z_0 \in G$ mit $z \in G$ verbinde.

Die Definition von $F(z)$ ist dabei unabhängig von der speziellen Wahl von γ , da nach Voraussetzung das Kurvenintegral über geschlossene Wege verschwindet.

Eine sorgfältige Analyse von F beweist dann den Satz. \square

Beispiele.

- i) Die Funktion $f(z) = z^k$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq -1$, hat auf \mathbb{C} bzw. $\mathbb{C} - \{0\}$ im Fall $k < 0$ die Stammfunktion

$$F(z) = \frac{1}{k+1} z^{k+1} \quad (+\text{konst.}) .$$

Demnach folgt

$$\int_{\gamma} z^k dz = \frac{1}{k+1} (z_1^{k+1} - z_0^{k+1}),$$

wobei z_0, z_1 den Anfangs- bzw. Endpunkt von γ bezeichnen.

ii) Ist $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = re^{it}$, $r > 0$ fixiert, so gilt nach Satz 2.5:

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$

Die auf $\mathbb{C} - \{0\}$ holomorphe Funktion z^{-1} kann dort keine Stammfunktion besitzen (vgl. das Beispiel „unendlich langer Leiter“ bei der Diskussion reeller Kurvenintegrale).

Dies ist ein wesentlicher Unterschied zu der Funktion z^{-n} , $n > 1$, der im Folgenden noch wiederholt deutlich wird.

Kapitel 3

Cauchys Integralsatz und Cauchys Integralformel

Der Cauchysche Integralsatz und die Cauchysche Integralformel gehören zu den herausragenden Aussagen der Funktionentheorie.

Grob gesprochen besagen bzw. implizieren diese, dass für eine holomorphe Funktion $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ definiert auf einem „unkomplizierten“ Gebiet G , z.B. einer Kreisscheibe, die folgenden Aussagen gelten

- i)* Alle Umlaufintegrale verschwinden, was nach Satz 2.8 die Existenz einer Stammfunktion impliziert.

- ii)* Die Funktion f ist beliebig oft komplex differenzierbar.

- iii)* Die Funktion f kann lokal in eine Taylor-Reihe entwickelt werden.

Notation.

Um insbesondere im Zusammenhang mit der Cauchyschen Integralformel Verwechslungen zu vermeiden, wird im Folgenden die komplexe Integrationsvariable in der Regel mit ζ bezeichnet.

3.1 Der Cauchysche Integralsatz

Der Cauchysche Integralsatz besagt, dass holomorphe Funktionen eine Stammfunktion haben, sofern der Definitionsbereich von geeigneter Gestalt ist.

Definition 3.1. *Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ (offen und zusammenhängend) heißt einfach zusammenhängend, falls jeder*

- ▷ Polygonzug $\gamma: [a, b] \rightarrow G$,
- ▷ der geschlossen ist (Anfangs- gleich Endpunkt, $\gamma(a) = \gamma(b)$)
- ▷ und der doppeltpunktfrei ist ($\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ für alle $t_1 \neq t_2$ mit $a \leq t_1, t_2 < b$)

nur Punkte von G umschließt.

Bemerkungen.

- i)* Ein „Polygonzug“ besteht aus einer Aneinanderreihung von Strecken.
- ii)* Für einen geschlossenen, doppeltpunktfreien Polygonzug ist die Anschauung völlig ausreichend, um die Eigenschaft „umschließen“ zu verstehen.
- iii)* Die Eigenschaft „doppeltpunktfrei“ bedeutet bei Polygonzügen wie bei Kurven wie bei Integrationswegen, dass kein Punkt zweimal durchlaufen wird (vgl. Abbildung 3.1).
- iv)* Die Menge G auf der linken Seite von Abbildung 3.2 ist einfach zusammenhängend, die Menge M auf der rechten Seite der Abbildung ist nicht einfach zusammenhängend.

Anschaulich bedeutet „einfach zusammenhängend“: „ G hat keine Löcher“.

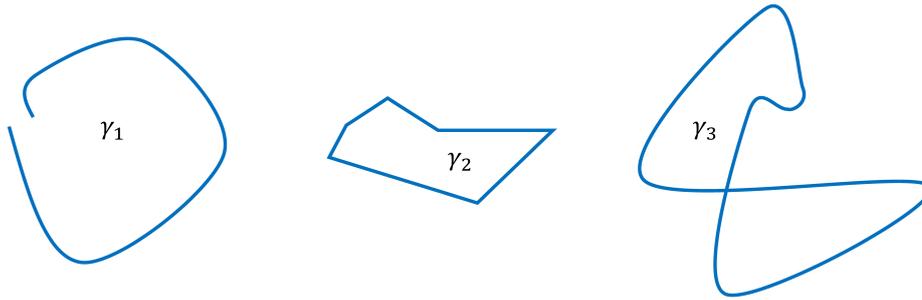


Abbildung 3.1: Doppelpunktfrei sind γ_1 und γ_2 (falls nur einmal durchlaufen), geschlossen sind γ_2 und γ_3 .

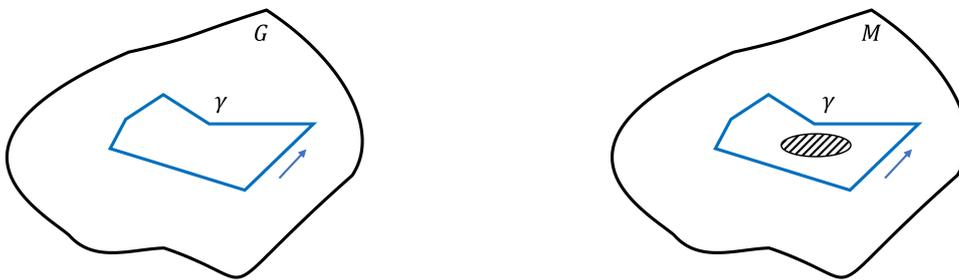


Abbildung 3.2: Eine Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Beispiele.

Die wichtigsten Beispiele im Folgenden sind:

i) Die Einheitskreisscheibe

$$B_1(0) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

ist einfach zusammenhängend.

ii) Das Gebiet (die „punktierte Kreisscheibe“)

$$B_1(0) - \{0\} = \{z \in B_1(0) : z \neq 0\}$$

ist nicht einfach zusammenhängend.

Um die Darstellung in diesem und in den folgenden Kapiteln möglichst einfach zu halten, wird vereinbart:

Konvention 3.2. *Alle im Folgenden betrachteten geschlossenen Kurven seien doppelpunktfrei, sofern es nicht explizit anders erwähnt ist.*

Der Cauchysche Integralsatz lautet mit den oben vereinbarten Begriffen:

Satz 3.3. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ sei holomorph.*

Dann gilt

$$\int_{\gamma} f(\zeta) \, d\zeta = 0 .$$

für jeden geschlossenen Integrationsweg in G .

Beweisidee. Im Beweis wird die Situation sukzessive auf die Betrachtung eines Dreiecks reduziert.

Auf kleinen Dreiecken wird approximiert

$$f(z) \approx f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \dots ,$$

wobei $f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ als Funktion von z eine Stammfunktion hat, sodass das Umlaufintegral verschwindet.

Als wesentliche Aufgabe bleibt, die Terme \dots höherer Ordnung genau zu kontrollieren. □

Bemerkungen.

i) Ist wie oben $\gamma(t) = re^{it}$, so folgt aus

$$\int_{\gamma} \frac{1}{\zeta} d\zeta = 2\pi i$$

kein Widerspruch, da $\mathbb{C} - \{0\}$ nicht einfach zusammenhängend ist.

ii) Unter den Voraussetzungen von Satz 3.3 folgt die Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals und damit die Existenz von Stammfunktionen.

Anwendung.

Mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes können auch reelle Integrale berechnet werden.

Hier soll die Behauptung

$$\int_0^{\infty} \sin(t^2) dt = \int_0^{\infty} \cos(t^2) dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi/2} \quad (1)$$

verifiziert werden (Fresnelsche Integrale).

Betrachtet sei das Gebiet $G = \mathbb{C}$, die Funktion

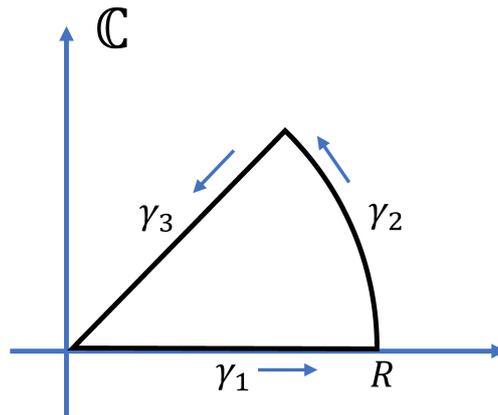
$$f(z) := e^{-z^2}$$

sowie das Kurvenintegral

$$\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma} e^{-\zeta^2} d\zeta .$$

Dabei sei der geschlossene Integrationsweg stückweise gegeben durch (vgl. Abbildung 3.3, $R > 0$ fixiert)

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= t & \text{für } t \in [0, R] & \quad \text{d.h. } \dot{\gamma}_1(t) = 1, \\ \gamma_2(t) &= Re^{it} & \text{für } t \in [0, \pi/4] & \quad \text{d.h. } \dot{\gamma}_2(t) = iRe^{it}, \\ \gamma_3(t) &= -te^{i\pi/4} & \text{für } t \in [-R, 0] & \quad \text{d.h. } \dot{\gamma}_3(t) = -e^{i\pi/4}. \end{aligned}$$

Abbildung 3.3: Der zusammengesetzte Integrationsweg γ .

Die Funktion $f(z) = e^{-z^2}$ ist holomorph, G ist einfach zusammenhängend, der aus γ_1 , γ_2 und γ_3 zusammengesetzte Weg γ ist ein geschlossener Integrationsweg (stückweise glatt).

Der Cauchysche Integralsatz impliziert

$$\int_{\gamma} e^{-\zeta^2} d\zeta = 0.$$

Mit Hilfe der Wegadditivität erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma} e^{-\zeta^2} d\zeta \\ &= \int_0^R e^{-t^2} 1 dt + \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 e^{2it}} iRe^{it} dt - \int_{-R}^0 e^{-t^2 e^{i\pi/2}} e^{i\pi/4} dt. \end{aligned}$$

Dies ergibt

$$\begin{aligned}
 0 &= \underbrace{\int_0^R e^{-t^2} dt}_{=:I_1(R)} + iR \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2[\cos(2t)+i\sin(2t)]+it} dt}_{=:I_2(R)} \\
 &\quad - \underbrace{e^{i\pi/4} \int_{-R}^0 e^{-it^2} dt}_{=:I_3(R)} .
 \end{aligned}$$

Es gilt (zum Beweis vgl. etwa [Hi], pp. 270)

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_1(R) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} .$$

Mit Hilfe von $|e^{i\alpha}| = 1$ kann man weiter zeigen:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} |I_2(R)| = 0 .$$

Wegen (Substitution $\tau = -t$)

$$\int_{-R}^0 e^{-it^2} dt = \int_0^R e^{-it^2} dt$$

ist also

$$0 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) \int_0^R (\cos(t^2) - i\sin(t^2)) dt .$$

Die Trennung in Real- und Imaginärteil ergibt

$$0 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \int_0^\infty (\cos(t^2) + \sin(t^2)) dt ,$$

$$0 = \int_0^\infty (\cos(t^2) - \sin(t^2)) dt ,$$

d.h. die Behauptung. □

Verallgemeinerung des Cauchyschen Integralsatzes.

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beliebiges Gebiet, d.h. G ist nicht mehr als einfach zusammenhängend vorausgesetzt.

Man betrachte etwa die in Abbildung 3.4 dargestellte Situation, wobei $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph sei.

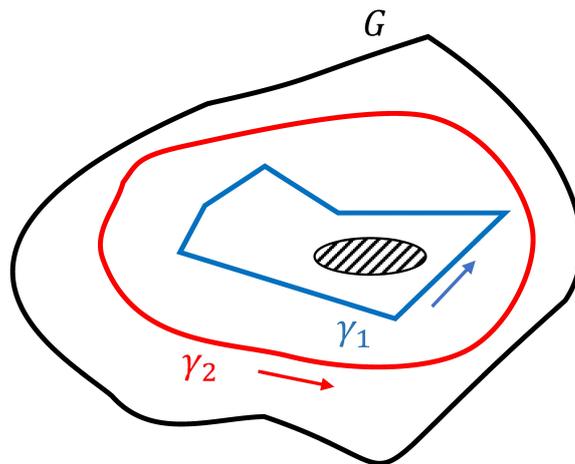


Abbildung 3.4: Zur Verallgemeinerung des Cauchyschen Integralsatzes.

Für die Integrationswege γ_i gilt i.A.

$$\int_{\gamma_i} f(\zeta) d\zeta \neq 0, \quad i = 1, 2.$$

Es gilt aber die Behauptung ($G, \gamma_i, i = 1, 2$ wie in Abbildung 3.4)

$$\int_{\gamma_1} f(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma_2} f(\zeta) d\zeta.$$

Die obige Gleichheit sieht man mit einer typischen Idee ein: Gegeben seien zwei Integrationswege γ_1, γ_2 wie in Abbildung 3.4 angedeutet. Mit zwei „Schnitten“ wird das (nicht einfach zusammenhängende) Gebiet in zwei einfach zusammenhängende Teilgebiete zerlegt, die von der roten Kurve α bzw. von der blauen Kurve β (siehe Abbildung 3.5) berandet sind.

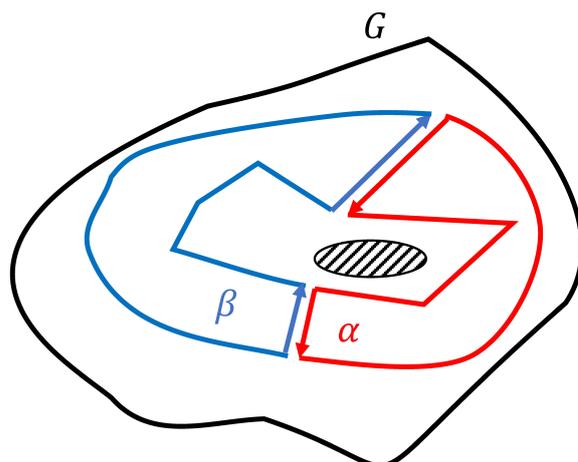


Abbildung 3.5: Zerlegung in einfach zusammenhängende Gebiete.

Für diese Kurven kann der Cauchysche Integralsatz angewendet werden:

$$\int_{\alpha} f(\zeta) d\zeta = 0, \quad \int_{\beta} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

Anschließend überlegt man sich:

- ▷ Die beiden „inneren“ Kurvenstücke von α und β entsprechen zusammen der Kurve $-\gamma_1$ („ γ_1 in umgekehrter Richtung durchlaufen“).
- ▷ Die beiden „äußeren“ Kurvenstücke von α und β entsprechen zusammen der Kurve γ_2 („in gleicher Richtung durchlaufen“).
- ▷ Die Integrale über die Wegstücke an der „Schnittstelle“ heben sich gegenseitig auf, da sie in „entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden“.

Insgesamt ist damit gezeigt:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\alpha} f(\zeta) \, d\zeta + \int_{\beta} f(\zeta) \, d\zeta \\
&= \int_{\gamma_2} f(\zeta) \, d\zeta - \int_{\gamma_1} f(\zeta) \, d\zeta ,
\end{aligned}$$

□

Konsequenz.

Eine der wichtigsten Schlussfolgerungen aus der obigen Verallgemeinerung des Cauchyschen Integralsatzes ist:

Es sei $G = \mathbb{C} - \{0\}$ und

$$f(z) = \frac{1}{z} .$$

Dann gilt

$$\int_{\gamma} \frac{1}{\zeta} \, d\zeta = \int_{\kappa_r(0)} \frac{1}{\zeta} \, d\zeta = 2\pi i .$$

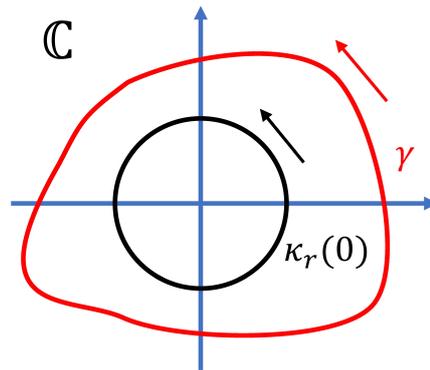
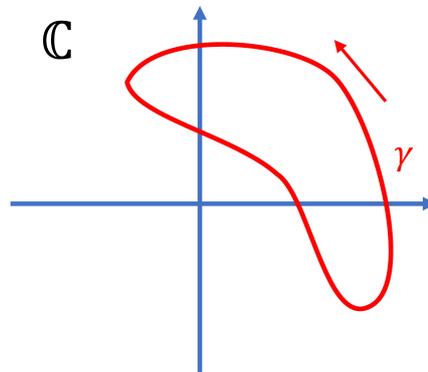
für jeden positiv orientierten geschlossenen Integrationsweg γ , der den Nullpunkt im Inneren enthält.

Dabei bezeichnet $\kappa_r(0)$ wie in Abbildung 3.6 angedeutet eine Parametrisierung der positiv orientierten Kreislinie vom Radius r um 0.

„Positiv orientiert“ bedeutet, dass beim Durchlaufen der Kurve das „Innere“ auf der linken Seite liegt.

Enthält γ den Nullpunkt nicht im Innern (vgl. Abbildung 3.7), so gilt (warum?)

$$\int_{\gamma} \frac{1}{\zeta} \, d\zeta = 0 .$$


 Abbildung 3.6: γ enthält den Nullpunkt im Innern und ist positiv orientiert.

 Abbildung 3.7: γ enthält den Nullpunkt nicht im Innern.

3.2 Die Cauchysche Integralformel

Notation.

Es seien $r > 0$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ fixiert. Im Folgenden bezeichnet

$$B_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

die offene Kreisscheibe vom Radius r um den Punkt z_0

Die positiv orientierte Kreislinie vom Radius r um den Punkt z_0 sei im Folgenden parametrisiert durch

$$\kappa_r(z_0) : [0, 2\pi] \ni t \mapsto z_0 + re^{it}.$$

Mit dieser Notation lautet die Cauchysche Integralformel für die Kreisscheibe (vgl. Abbildung 3.8):

Satz 3.4. *Es sei f holomorph auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ und es gelte $\overline{B_r(z_0)} \subset U$.*

Dann ist

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{für alle } z \in B_r(z_0).$$

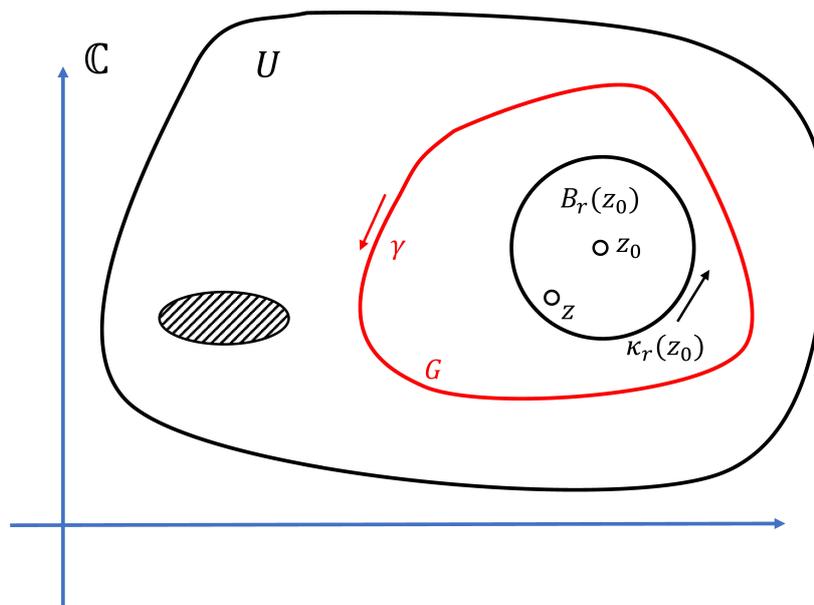


Abbildung 3.8: Zur Cauchyschen Integralformel.

Bemerkungen.

i) Der Satz besagt:

Allein aus der Kenntnis einer holomorphen Funktion f auf dem Rand einer Kreisscheibe $\partial B_r(z_0)$ ergeben sich die Funktionswerte

auf der ganzen Kreisscheibe $B_r(z_0)$.

Eine vergleichbare Aussage wäre für reell differenzierbare Funktionen $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ völlig falsch.

ii) Ist $z \in U - \overline{B_r(z_0)}$, so gilt (warum?)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0.$$

iii) Als Verallgemeinerung ist festzuhalten:

Es sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Ist γ ein geschlossener Integrationsweg (nach Konvention 3.2 doppel­punkt­frei), positiv orientiert und verläuft γ in einem einfach zusammenhängenden Teilbereich von U (wie in Abbildung 3.8 angedeutet), so gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

für alle z aus dem von γ umschlossenen offenen Bereich.

Punkte z auf dem Integrationsweg dürfen natürlich nicht eingesetzt werden.

Beweisidee.

Der Beweis wird über die Verallgemeinerung des Cauchyschen Integralsatzes geführt.

Dazu betrachte man in Abbildung 3.8 zu $\varepsilon > 0$ hinreichend klein eine Kreislinie $\kappa_\varepsilon(z)$, die ganz in $B_r(z_0)$ verläuft und beachtet, dass die Funktion

$$\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

holomorph auf einer Umgebung von $\overline{B_r(z_0) - B_\varepsilon(z)}$ ist.

Es folgt

$$\begin{aligned} \int_{\kappa_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \int_{\kappa_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \int_{\kappa_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta + f(z) \int_{\kappa_\varepsilon(z)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \\ &= \int_{\kappa_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta + 2\pi i f(z). \end{aligned}$$

Da f nach Voraussetzung holomorph ist, konvergiert das Integral auf der rechten Seite im Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen Null und es ergibt sich die Cauchysche Integralformel. \square

Beispiel.

Zu berechnen sei

$$\int_{\kappa_1(2i)} \frac{1}{\zeta^2 + 4} d\zeta,$$

sofern dieses Integral überhaupt definiert ist.

Dazu beobachtet man zunächst, dass

$$z^2 + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z \in \{-2i, 2i\}.$$

Der Integrand ist also stetig auf $\kappa_1(2i)$ (vgl. Abbildung 3.9) und das Integral ist wohl definiert.

Zur Berechnung des Integrals soll die Cauchysche Integralformel mit $z = z_0 = 2i$ angewandt werden, d.h. mit geeigneter holomorpher Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ sei

$$\frac{1}{\zeta^2 + 4} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - 2i}.$$

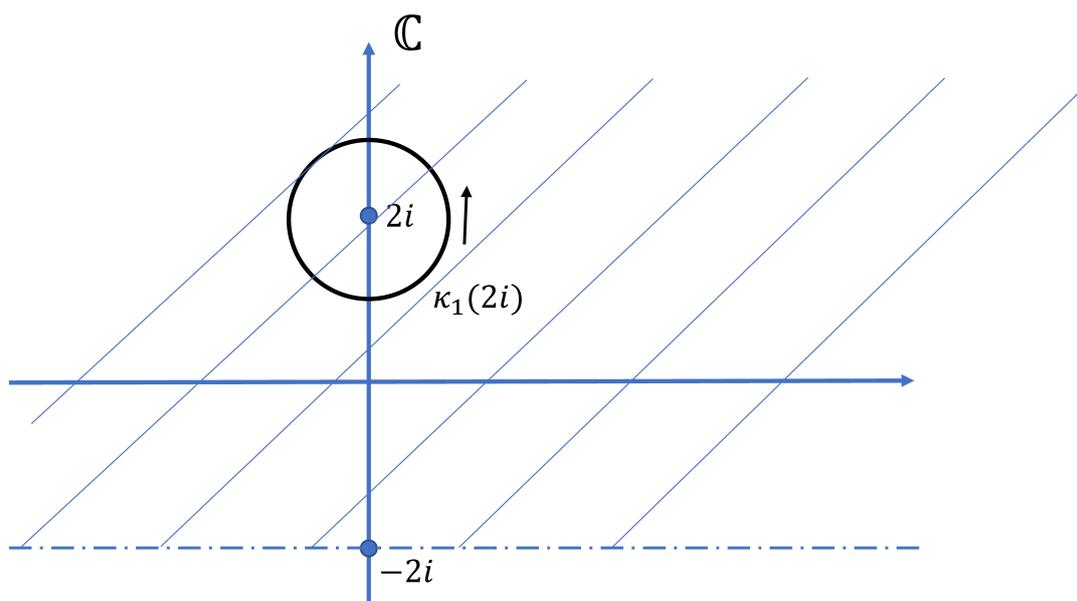


Abbildung 3.9: Ein Beispiel zur Cauchyschen Integralformel.

Man erkennt als geeignete Wahl (vgl. wieder Abbildung 3.9)

$$U = \{\zeta : \operatorname{Im} \zeta > -2\}, \quad f(\zeta) = \frac{1}{\zeta + 2i}.$$

Es folgt

$$\int_{\kappa_1(2i)} \frac{1}{\zeta^2 + 4} d\zeta = \int_{\kappa_1(2i)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - 2i} d\zeta = 2\pi i f(2i) = 2\pi i \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}.$$

Höhere Ableitungen.

In der reellen Situation gibt es Funktionen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, die tatsächlich nur einmal differenzierbar sind. Im Fall holomorpher Funktionen folgt aus der einmaligen komplexen Differenzierbarkeit unmittelbar die Existenz von Ableitungen beliebiger Ordnung.

Betrachtet man nämlich die Funktion (Voraussetzungen wie in Satz 3.4)

$$B_r(z_0) \ni z \mapsto \int_{\kappa_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

und leitet diese unter dem Integralzeichen nach z ab, so ergibt sich

$$\frac{d}{dz} \int_{\kappa_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\kappa_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta .$$

Induktiv folgt nach Satz 3.4:

Satz 3.5. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph.*

Dann existieren auf U alle komplexen Ableitungen $f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$.

Gilt $\overline{B_r(z_0)} \subset U$, so gilt für alle $z \in B_r(z_0)$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\kappa_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta .$$

Anwendung.

Es sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, $f = u + iv$ holomorph.

Nach Satz 3.5 ist beliebig oft differenzierbar und die Cauchy- Riemannschen Differentialgleichungen

$$u_x = v_y , \quad u_y = -v_x$$

können differenziert werden.

Wird die erste Gleichung nach x differenziert, die zweite nach y , so folgt

$$u_{xx} = v_{yx} , \quad u_{yy} = -v_{xy}$$

und aus der Vertauschbarkeit der Ableitungen folgt

$$u_{xx} + u_{yy} = \Delta u = 0 .$$

Analog sieht man

$$v_{xx} + v_{yy} = \Delta v = 0 .$$

Mit anderen Worten: Real- und Imaginärteil holomorpher Funktionen sind harmonisch.

Weitere Beispiele.

i) Es seien $r > 0$ und $f(z) \equiv 1$. Dann ist

$$f'(z) = 0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_r(z_0)} \frac{1}{(\zeta - z)^2} d\zeta .$$

ii) Zu berechnen sei mit Hilfe von Satz 3.5

$$\int_{\kappa_1(0)} \frac{e^{i\zeta}}{\zeta^3} d\zeta .$$

Es sei $z_0 = 0$ und

$$f(z) = e^{iz} , \quad \text{also} \quad f''(z) = -e^{iz} .$$

Es folgt

$$f''(0) = -1 = \frac{2!}{2\pi i} \int_{\kappa_1(0)} \frac{e^{i\zeta}}{\zeta^3} d\zeta ,$$

und folglich

$$\int_{\kappa_1(0)} \frac{e^{i\zeta}}{\zeta^3} dz = -\pi i .$$

Satz 3.4 bzw. Satz 3.5 haben zahlreiche weitere Folgerungen. Exemplarisch sei hier lediglich der klassische Satz von Liouville angegeben, der ebenfalls kein reelles Analogon hat.

Satz 3.6. *Ist $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ auf ganz \mathbb{C} holomorph (Sprechweise: f sei eine ganze Funktion) und beschränkt (d.h. $|f| \leq \text{konst.}$ für alle $z \in \mathbb{C}$), so gibt es ein $c \in \mathbb{C}$ mit*

$$f \equiv c \quad \text{auf } \mathbb{C} .$$

Der Beweis ergibt sich aus der Cauchyschen Integralformel für f' auf $\kappa_R(z_0)$ im Grenzwert $R \rightarrow \infty$.

Kapitel 4

Entwicklungen holomorpher Funktionen

Reihenentwicklungen spielen in der Funktionentheorie eine ganz besondere Rolle. In Kapitel 1 wurde kurz an die Diskussion komplexer Potenzreihen erinnert, insbesondere wurde Satz 1.2 in Erinnerung gerufen.

4.1 Taylor-Reihen

Die erste Feststellung dieses Abschnittes ist: Komplexe Potenzreihen beschreiben holomorphe Funktionen.

Beispiel: Geometrische Reihe.

Man betrachte die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n .$$

Für die Partialsummen gilt

$$\sum_{n=0}^N z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} , \quad \text{falls } z \neq 1 .$$

Für $|z| < 1$ ist $\lim_{N \rightarrow \infty} z^{N+1} = 0$, also folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad \text{für } |z| < 1.$$

Für $|z| \geq 1$ ist $\{z^n\}$ keine Nullfolge, die geometrische Reihe divergiert.

Nun wird die Ableitung der Funktion $1/(1-z)$ mit Hilfe des Cauchy-Produktes für Reihen analysiert: Für $|z| < 1$ ist

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{1-z}\right)' &= \frac{1}{(1-z)^2} = \frac{1}{1-z} \frac{1}{1-z} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n z^k z^{n-k}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n. \end{aligned}$$

Mit $j = n + 1$ ist gezeigt

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \sum_{j=1}^{\infty} jz^{j-1} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^n)'$$

In Verallgemeinerung des Beispiels besagt der folgende Satz, dass durch Potenzreihen holomorphe Funktionen definiert sind und dass sich die Ableitung durch gliedweise Differentiation berechnen lässt.

Satz 4.1. *Besitzt eine Potenzreihe*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

den Konvergenzradius $r > 0$, so ist dadurch in der Kreisscheibe $B_r(z_0)$ eine holomorphe Funktion $f(z)$ mit

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

als Ableitung gegeben. Diese Potenzreihe hat denselben Konvergenzradius wie $f(z)$.

Beispiel.

Man betrachte

$$f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} .$$

Es ist $r = \infty$ und

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z .$$

Nach Satz 4.1 sind durch Potenzreihen holomorphe Funktionen definiert.

Umgekehrt stellt sich die Frage, ob holomorphe Funktionen immer als Potenzreihe, d.h. durch ihre Taylor-Reihe, dargestellt werden können.

Satz 4.2. *Es sei $f(z)$ holomorph für $|z - z_0| < r$ mit $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$.*

Man bilde die formale Taylor-Reihe in z_0 :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n , \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} .$$

Dann konvergiert diese auf $B_r(z_0)$ gegen f , d.h.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \quad z \in B_r(z_0).$$

Bemerkungen.

- i) Ein Vergleich von Satz 4.2 und Satz 3.5 zeigt für $0 < \rho < r$ und für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_\rho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Hier kann $\kappa_\rho(z_0)$ auch durch einen beliebigen, einfachen geschlossenen Integrationsweg ersetzt werden, der im mathematisch positiven Sinne durchlaufen wird, ganz in $B_r(z_0)$ liegt und z_0 im Innern enthält.

- ii) Ist f in einer offenen Menge U holomorph, $z_0 \in U$, so konvergiert die Taylor-Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) (z - z_0)^n$$

auf jeder offenen Kreisscheibe um z_0 , die in U enthalten ist, gegen den Funktionswert $f(z)$.

Typisches Beispiel.

Das folgende Beispiel zeigt insbesondere, dass es manchmal einfacher ist, auf bekannte Reihen zurückzugreifen als nach einer expliziten Rekursionsformel für die Ableitungen von f zu suchen.

Für $z \in U = \mathbb{C} - \{1, -2\}$ sei

$$f(z) = \frac{3}{(1-z)(2+z)}.$$

Gesucht sind die Koeffizienten der Taylor-Reihe um $z_0 = i$, die nach Bemerkung ii) für $|z - i| < \sqrt{2}$ konvergiert (vgl. Abbildung 4.1).

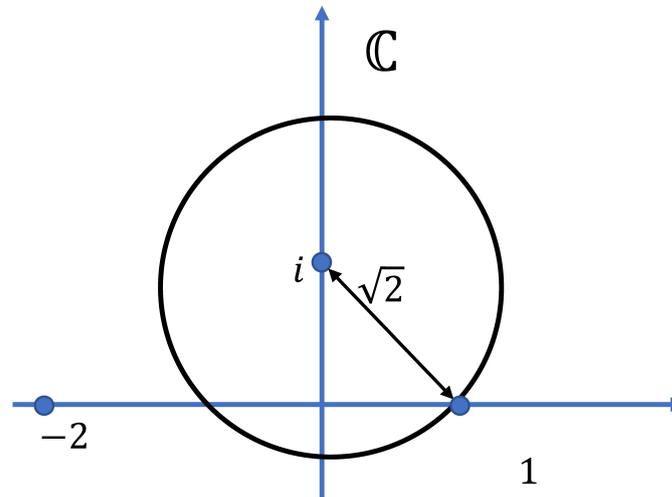


Abbildung 4.1: Zur Taylorreihe von f um i .

Die Koeffizienten können im Prinzip nach Bemerkung i) berechnet werden, es gilt aber auch (Partialbruchzerlegung)

$$f(z) = \frac{3}{(1-z)(2+z)} = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2+z}.$$

Allgemeine Strategie.

Ist eine Funktion h von der Gestalt

$$h(z) = \frac{1}{a+bz}, \quad a, b \neq 0 \in \mathbb{C},$$

so kann die Taylor-Reihe um einen Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ ggf. nach der folgenden Strategie gefunden werden:

i) Schreibe

$$h(z) = \frac{1}{a+bz} = \frac{1}{a+bz_0 + b(z-z_0)},$$

um den Entwicklungspunkt z_0 einzufügen.

ii) Nun wird äquivalent umgeformt

$$h(z) = \frac{1}{a + bz_0} \frac{1}{1 + \frac{b}{a+bz_0}(z - z_0)}.$$

Dabei ist zu beachten, dass $a + bz_0 \neq 0$, falls h in z_0 definiert ist.

iii) Man formt weiter um

$$h(z) = \frac{1}{a + bz_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{-\frac{a+bz_0}{b}}}$$

iv) Es gelte

$$|z - z_0| < \left| \frac{a + bz_0}{b} \right|.$$

Der Grenzwert der geometrischen Reihe liefert für diese z

$$h(z) = \frac{1}{a + bz_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{b}{a + bz_0} \right)^n (z - z_0)^n$$

und damit die eindeutig bestimmte Taylor-Reihe von h um den Entwicklungspunkt z_0 .

Im obigen Beispiel kann dies eingesetzt werden bzw. rechnet man wie folgt:

Für $|z - i| < \sqrt{2}$ gilt $\left| \frac{z-i}{1-i} \right| < 1$, und mit Hilfe der geometrischen Reihe findet man

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= \frac{1}{1-i-(z-i)} = \frac{1}{1-i} \frac{1}{1-\frac{z-i}{1-i}} \\ &= \frac{1}{1-i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-i}{1-i} \right)^n. \end{aligned}$$

Analog gilt wegen $|(z - i)/(2 + i)| < 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2+z} &= \frac{1}{2+i+(z-i)} = \frac{1}{2+i} \frac{1}{1+\frac{z-i}{2+i}} \\ &= \frac{1}{2+i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-i}{2+i}\right)^n. \end{aligned}$$

Man erhält die Taylor-Entwicklung um $z_0 = i$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{1}{(1-i)^{n+1}} + (-1)^n \frac{1}{(2+i)^{n+1}} \right]}_{=a_n} (z-i)^n.$$

4.2 Laurent-Reihen

Betrachtet sei beispielhaft die Funktion

$$f(z) := \frac{e^z}{z}, \quad z \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

Aufgrund der Singulartität hat diese Funktion sicher keine Taylor-Entwicklung um den Entwicklungspunkt $z_0 = 0$.

Man beachtet aber für $z \neq 0$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{k-1} \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(l+1)!} z^l. \end{aligned}$$

In dieser Schreibweise erkennt man zwei Anteile:

Der erste Anteil, z^{-1} , misst das singuläre Verhalten bei $z \rightarrow 0$.

Der zweite Anteil,

$$1 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{3!}z^2 + \dots$$

ist der über die 0 hinaus gehende holomorphe Bestandteil von f .

Als weiteres Beispiel betrachte man die Funktion

$$f(z) := e^{1/z}, \quad z \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

In diesem Beispiel ist

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{-k} \\ &= 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \dots \end{aligned}$$

Nun ist der holomorphe Anteil die konstante Funktion 1.

Der singuläre Anteil ist in diesem Beispiel

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{2} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \dots$$

Zur Beschreibung des Verhaltens von $f(z)$ bei $z \rightarrow 0$ werden alle negativen Potenzen von z benötigt.

Frage.

Es sei f für $z \neq 0$ eine holomorphe Funktion (in einer Umgebung von 0) und ggf. in $z = 0$ nicht definiert. Gibt es dann ähnlich wie in den Beispielen eine additive Zerlegung in einen bei 0 holomorphen Anteil und einen singulären Anteil?

Im Folgenden sei für $0 \leq r_1 < r_2$ und für $z_0 \in \mathbb{C}$

$$A_{r_1, r_2}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\} .$$

Definition 4.3. Mit $a_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ heißt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

eine Laurent-Reihe um den Entwicklungspunkt z_0 . Es heißt weiter

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

der Nebenteil (oder der Regulärteil) und

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

der Hauptteil der Laurent-Reihe.

Konvergenz einer Laurent-Reihe?

Bei der Frage nach der möglichen Konvergenz einer Laurent-Reihe ist zunächst zu beachten, dass der Nebenteil eine Potenzreihe im üblichen Sinne ist. Es sei angenommen, dass diese die im Konvergenzreis $B_{r_2}(z_0)$ konvergiere.

Zur Analyse des Hauptteils setzt man $w = (z - z_0)^{-1}$. Mit dieser Substitution kann der Hauptteil geschrieben werden als

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n .$$

Dies wiederum ist eine Potenzreihe in w , man nehme an, sie konvergiere für $|w| < \rho$, also für

$$|z - z_0| > \frac{1}{\rho} =: r_1 .$$

Ist nun $0 < r_1 < r_2$, so konvergiert die Laurent-Reihe also auf dem Kreisring $A_{r_1, r_2}(z_0)$. Ist $r_1 = r_2$, so kann die Reihe höchstens für $|z| = r_1 = r_2$ konvergieren, ist $r_1 > r_2$, so kann die Reihe nirgends konvergieren.

Satz 4.4. *Für eine Laurent-Reihe gilt eine der drei folgenden Alternativen:*

- i) Die Reihe konvergiert nirgends.*
- ii) Die Reihe konvergiert für gewisse Punkte einer Kreislinie um z_0 .*
- iii) Die Reihe konvergiert auf einem Kreisring um z_0 .*

Kann eine auf einem Kreisring holomorphe Funktion eindeutig durch eine konvergente Laurent-Reihe dargestellt werden?

Dazu betrachte man eine Kurve γ wie in Abbildung 4.2 angedeutet. Die Kurve liegt in $A_{r_1, r_2}(z_0)$, ist positiv orientiert und umschließt keine „Löcher“ von $A_{r_1, r_2}(z_0)$.

Der Punkt z liegt wiederum im Innern von γ . Die Verallgemeinerung von Cauchys Formel besagt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta .$$

Im „Grenzübergang“ konvergiere γ gegen zwei in entgegengesetzter Orientierung durchlaufene Kreislinien vom Radius t_1 bzw. t_2 ,

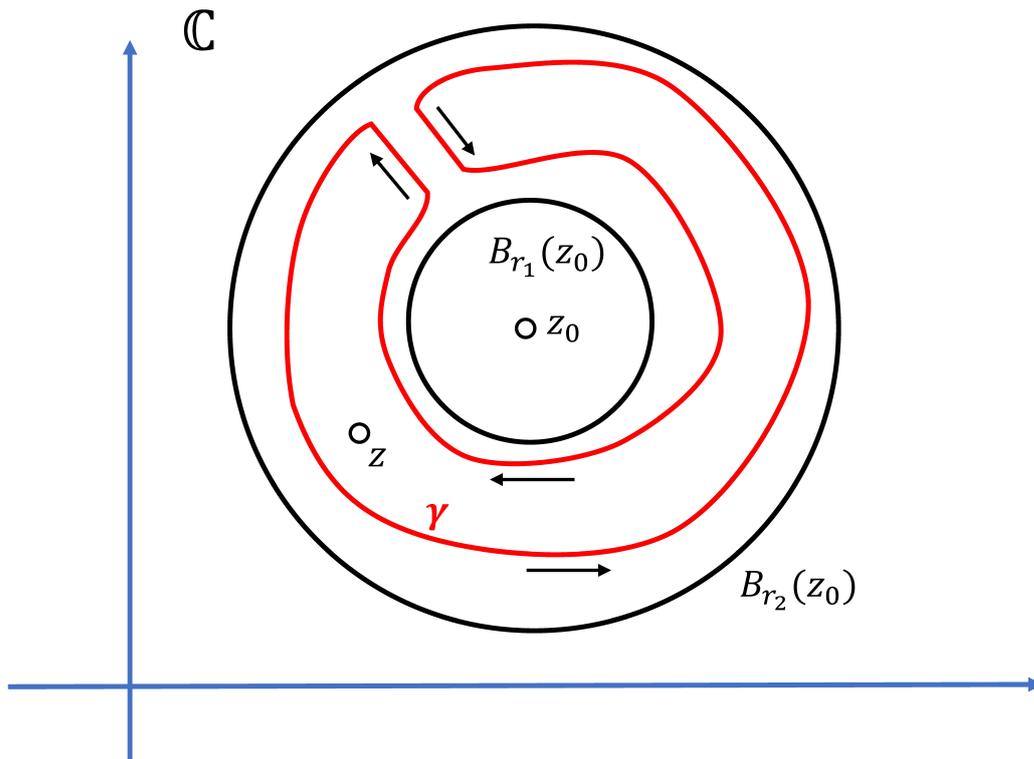


Abbildung 4.2: Zur Laurent-Entwicklung.

$$r_1 < t_1 < t_2 < r_2.$$

Es folgt mit der bekannten Argumentation

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_{t_2}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_{t_1}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &=: f_2(z) + f_1(z). \end{aligned}$$

Nun sei o.E. $z_0 = 0$. Für $|\zeta| = t_2$ hat man wegen $|z| < t_2$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} = \frac{1}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n.$$

Aus $t_1 < |z|$ folgt hingegen für $|\zeta| = t_1$

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{\zeta}{z}} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta}{z}\right)^n.$$

Einsetzen in die f_i , $i = 1, 2$, liefert

$$\begin{aligned} f_2(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_{t_2}(0)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} z^n d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_{\kappa_{t_2}(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_{t_1}(0)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{-n}} z^{-n-1} d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-(n+1)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_{t_1}(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{-n}} d\zeta \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} z^{-m} \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_{t_1}(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{-m+1}} d\zeta . \end{aligned}$$

Dementsprechend ist f gemäß Definition 4.3 auf $A_{r_1, r_2}(0)$ als konvergente Laurent-Reihe geschrieben:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_{t_2}(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \right] z^n \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_{t_1}(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{-m+1}} d\zeta \right] z^{-m} . \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis wird zusammengefasst in:

Satz 4.5. *Es sei f holomorph auf einem Kreisring $A_{r_1, r_2}(z_0)$, $0 \leq r_1 < r_2$, $z_0 \in \mathbb{C}$.*

Dann ist f auf $A_{r_1, r_2}(z_0)$ eindeutig darstellbar als Laurent-Reihe (Laurent-Entwicklung um den Entwicklungspunkt z_0)

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

wobei die Koeffizienten für alle $k \in \mathbb{Z}$ gegeben sind durch ($r_1 < \rho < r_2$)

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_\rho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta.$$

Bemerkungen.

i) Wieder können die a_k auch durch Integration über einen einfachen, geschlossenen Integrationsweg berechnet werden, der ganz in $A_{r_1, r_2}(z_0)$ liegt und im positiven Sinne durchlaufen wird.

ii) Eine Taylor-Reihe ist eine Laurent-Reihe mit $a_{-n} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel.

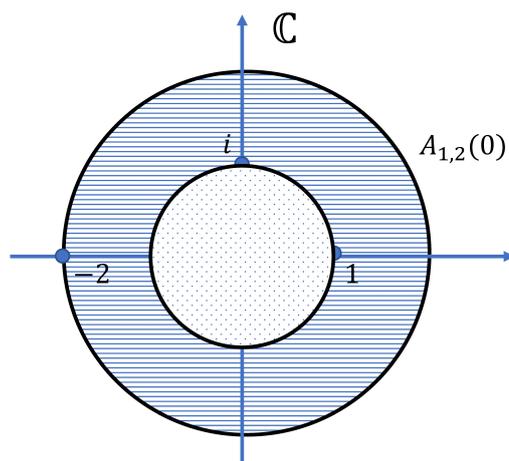
Es sei wieder

$$f(z) = \frac{3}{(1-z)(2+z)} = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2+z}.$$

Mit $z_0 = 0$ ist f holomorph auf $A_{1,2}(z_0)$. Wie oben sieht man mit Hilfe der Konvergenz der geometrischen Reihe und wegen $|z^{-1}|, |z/2| < 1$ auf $A_{1,2}(0)$ (man beachte: Auf $A_{1,2}(0)$ ist $|z| \geq 1$ und $1/(1-z)$ kann nicht als konvergente geometrische Reihe geschrieben werden.):

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n,$$

$$\frac{1}{2+z} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^n.$$

Abbildung 4.3: f ist holomorph auf $A_{1,2}(0)$.

Die Laurent-Reihe von $f(z)$ um 0 ist demnach für $1 < |z| < 2$:

$$f(z) = - \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n .$$

Klassifikation isolierter Singularitäten mit Hilfe von Satz 4.5.

Als Anwendung soll nun untersucht werden, wie sich z.B. die Funktionen $1/z$ und $e^{1/z}$ in der Nähe des Punktes $z_0 = 0$ unterscheiden.

Notation. Zu $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$, bezeichne $B_r^*(z_0)$ die punktierte Kreisscheibe vom Radius r um z_0 :

$$B_r^*(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\} = A_{0,r}(z_0) .$$

Mit dieser Notation wird der Begriff einer isolierten Singularität eingeführt. Dabei muss f nicht in z_0 definiert sein.

Definition 4.6. Ist f auf $B_r^*(z_0)$ definiert und holomorph, so heißt z_0 eine isolierte Singularität von f .

Beispiele.

i) Die Funktion

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$$

hat in $z_0 = 0$ eine isolierte Singularität.

ii) Die oben genannten Funktionen

$$z \mapsto \frac{1}{z} \quad \text{und} \quad z \mapsto e^{1/z}$$

haben ebenfalls in $z_0 = 0$ eine isolierte Singularität.

iii) Die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)(2+z)(z-i)}, \quad z \in \mathbb{C} - \{1, -2, i\},$$

hat isolierte Singularitäten in den Punkten $z_1 = 1$, $z_2 = -2$, $z_3 = i$.

iv) Die Funktion

$$f(z) := \frac{1}{\sin(z^{-1})}$$

ist in $z_0 = 0$ singulär. Diese Singularität ist aber nicht isoliert.

Ziel ist es, das Verhalten von holomorphen Funktionen $f: B_r^*(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ mit Hilfe ihrer Laurent-Entwicklung zu beschreiben. Man charakterisiert dazu:

Definition 4.7. *Es sei f auf $B_r^*(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion.*

i) *Der Punkt z_0 heißt hebbare Singularität, wenn der Hauptteil der Laurent-Reihe um z_0 verschwindet.*

ii) Der Punkt z_0 heißt *Pol der Ordnung p* , $p \in \mathbb{N}$, wenn der Hauptteil der Laurent-Reihe um z_0 von der Form ist

$$\sum_{n=1}^p a_{-n}(z - z_0)^{-n}, \quad a_{-p} \neq 0.$$

Funktionen f , die nur Polstellen als Singularitäten besitzen, heißen *meromorphe Funktionen*.

iii) Der Punkt z_0 heißt *wesentliche Singularität*, wenn der Hauptteil der Laurent-Reihe um z_0 unendlich viele nicht-verschwindende Glieder hat.

Beispiele.

i) Es sei

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z}, \quad z_0 = 0.$$

Dann ist f zwar in z_0 nicht definiert, es gilt aber:

$$\frac{\sin(z)}{z} = \frac{1}{z} \left[z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \dots \right] = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} \dots$$

Der Hauptteil der Laurentreihe um 0 verschwindet, $\sin(z)/z$ lässt sich durch den Wert 1 holomorph in den Nullpunkt fortsetzen (hebbare Singularität).

ii) Es sei

$$f(z) = \frac{3}{(1-z)(2+z)}, \quad z \in \mathbb{C} - \{1, -2\}.$$

Hier sind $z_1 = 1$ und $z_2 = -2$ Pole der Ordnung 1.

iii) Es sei

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^3}, \quad z \in \mathbb{C} - \{i\}.$$

In diesem Beispiel ist $z_0 = i$ ein Pol der Ordnung 3.

iv) Es sei

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}, \quad z \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

Es gilt wie bereits oben angedeutet

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^{-1})^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n},$$

also ist $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität.

Kapitel 5

Der Residuensatz

Es sei im Folgenden G ein einfach zusammenhängendes Gebiet und γ ein einfach geschlossener, positiv orientierter Weg in G .

Nach dem Cauchyschen Integralsatz (Satz 3.3) ist bekannt, dass für holomorphe Funktionen $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ gilt

$$\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

Ist die Funktion f lediglich holomorph auf $G - \{z_1\}$, so wähle man wie in Abbildung 5.1 angedeutet eine hinreichend kleine von γ umschlossene Kreisscheibe $B_{r_1}(z_1)$.

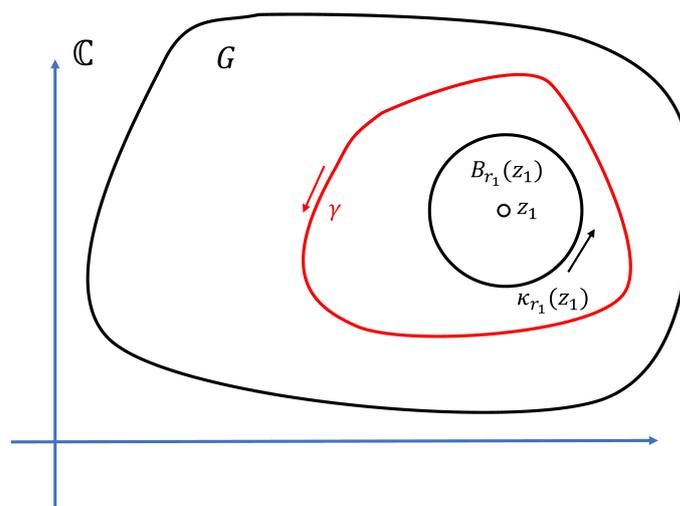


Abbildung 5.1: Der Fall einer isolierten Singularität.

Die Verallgemeinerung des Cauchyschen Integralsatzes besagt in der skizzierten Konstellation

$$\int_{\gamma} f(\zeta) \, d\zeta = \int_{\kappa_{r_1}(z_1)} f(\zeta) \, d\zeta .$$

Ist f holomorph auf $G - \{z_1, z_2\}$, d.h. liegen zwei isolierte Singularitäten in z_1 bzw. z_2 vor, so argumentiert man mit einer wie in Abbildung 5.2 angedeuteten Kurve, die im Grenzübergang zwei hinreichend kleine disjunkte Kreisscheiben $B_{r_1}(z_1)$ und $B_{r_2}(z_2)$ umschließt.

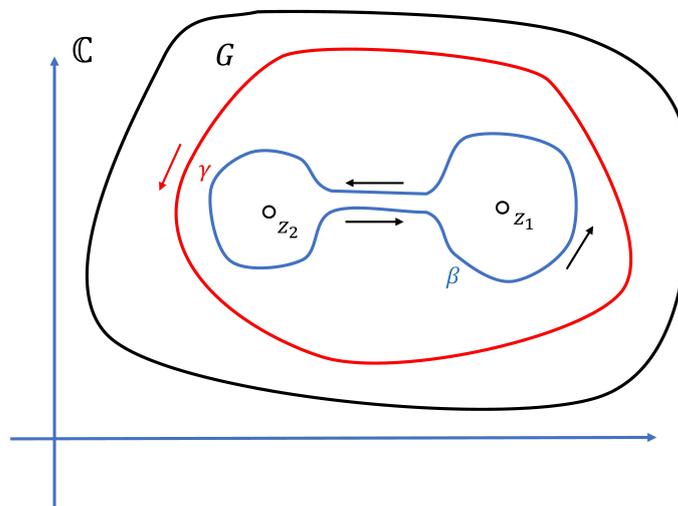


Abbildung 5.2: Zwei Singularitäten.

Dies führt auf

$$\int_{\gamma} f(\zeta) \, d\zeta = \sum_{k=1}^2 \int_{\kappa_{r_k}(z_k)} f(\zeta) \, d\zeta .$$

Induktiv folgt für N isolierte Singularitäten z_1, \dots, z_N umschlossen von der Kurve γ und eine auf $G - \{z_1, \dots, z_n\}$ holomorphe Funktion f

$$\int_{\gamma} f(\zeta) \, d\zeta = \sum_{k=1}^N \int_{\kappa_{r_k}(z_k)} f(\zeta) \, d\zeta$$

mit hinreichend kleinen und paarweise disjunkten Kreisscheiben, die ansonsten aber beliebige Radien haben dürfen.

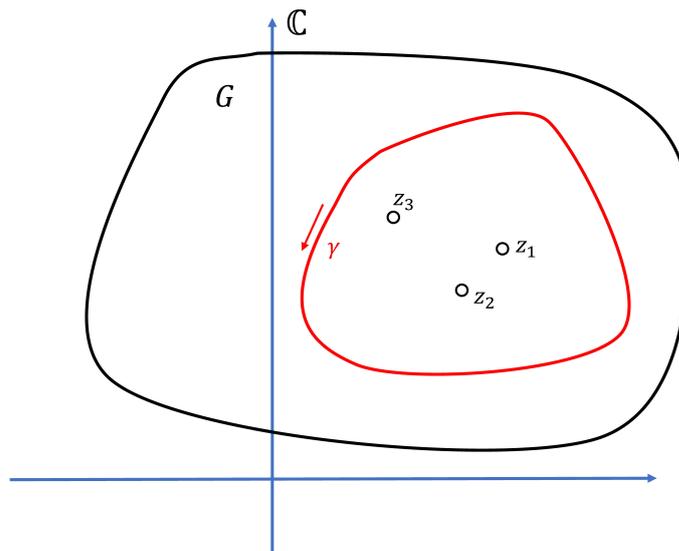


Abbildung 5.3: Endlich viele isolierte Singularitäten.

5.1 Residuen

Motiviert durch die einleitenden Betrachtungen definiert man:

Definition 5.1. Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. Die Funktion f sei holomorph auf $B_r^*(z_0)$.

Für $0 < \rho < r$ heißt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_\rho(z_0)} f(\zeta) d\zeta =: \operatorname{res}_{z_0} f$$

das Residuum von f in der isolierten Singularität z_0 .

Bemerkungen.

- i) Nach dem Cauchyschen Integralsatz (bzw. dessen Verallgemeinerung) hängt $\operatorname{res}_{z_0} f$ nicht von der speziellen Wahl von $\rho \in (0, r)$ ab.

Außerdem kann wieder statt $\kappa_\rho(z_0)$ ein beliebiger, einfacher geschlossener, positiv orientierter Integrationsweg in $B_r^*(z_0)$ betrachtet werden.

ii) Nach Satz 4.5 ist das Residuum von f in z_0 genau der Koeffizient a_{-1} in der Laurent-Entwicklung von f um z_0 .

iii) Bemerkung *ii)* kann wie folgt veranschaulicht werden:

Schreibt man f lokal als Laurent-Reihe und vertauscht man Integration und Summation, so verschwinden nach Satz 2.5 in der Summe alle Integrale über $a_k(z - z_0)^k$, $k \neq -1$. Lediglich das Integral mit $k = -1$ gibt einen Beitrag.

Beispiele.

i) Es sei

$$f(z) = \frac{3}{z - i}, \quad z \in \mathbb{C} - \{i\}.$$

Nach Satz 2.5 ist für $\rho > 0$

$$\int_{\kappa_\rho(i)} \frac{1}{\zeta - i} d\zeta = 2\pi i,$$

also folgt

$$\operatorname{res}_i f(z) = \frac{1}{2\pi i} [3 \cdot 2\pi i] = 3.$$

Zu beachten ist hier: $3/(z - i)$ ist bereits die Laurent-Reihe von f um den Punkt $z_0 = i$, also $a_{-1} = 3$.

ii) Es sei

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}, \quad z \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

Es wurde bereits gezeigt:

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n},$$

also ist $a_{-1} = 1$ und $\operatorname{res}_0 f = 1$.

Die Integraldarstellung des Residuums sowie die Entwicklung von f in eine Laurent-Reihe können in der Praxis allerdings Schwierigkeiten bereiten, d.h. es stellt sich die Frage nach:

Hilfsmittel zur Berechnung von Residuen?

Satz 5.2. *i) Es sei $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, wobei g, h holomorph seien auf $B_r(z_0)$. Weiterhin sei $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ und $h'(z_0) \neq 0$.*

Dann ist das Residuum von f in z_0

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \operatorname{res}_{z_0} \frac{g}{h} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

ii) Die meromorphe Funktion f habe in $z_0 \in \mathbb{C}$ einen Pol der Ordnung p . Dann gilt

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(p-1)!} \left[\frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} \left[(z - z_0)^p f(z) \right] \right].$$

Beispiele.

i) Es sei

$$f(z) = \frac{z^2 + 4}{\sin(z)}, \quad 0 < |z| < \frac{\pi}{2}, \quad z_0 = 0.$$

Satz 5.2, i), ist anwendbar mit $g(z) = z^2 + 4$, $h(z) = \sin(z)$.

$$\operatorname{res}_0 \frac{z^2 + 4}{\sin(z)} = \frac{4}{\cos(0)} = 4.$$

ii) Es sei

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^3}, \quad z \in \mathbb{C} - \{0\}, \quad z_0 = 0.$$

Hier ist z_0 ein Pol der Ordnung 3 und es gilt nach Satz 5.2, ii),

$$\operatorname{res}_0 \frac{e^{iz}}{z^3} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2}{dz^2} e^{iz} \right] = -\frac{1}{2}.$$

5.2 Der Residuensatz

Der Hauptsatz dieses Kapitels ist der Residuensatz:

Satz 5.3. *Es sei γ ein einfach geschlossener, positiv orientierter Integrationsweg in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G .*

Es seien $z_1, \dots, z_N \in G$ und $z_k \notin \operatorname{Spur} \gamma$, $k = 1, \dots, N$, und f holomorph auf $G - \{z_1, \dots, z_N\}$.

Sind für $M \leq N$

$$z_1^*, \dots, z_M^* \in \{z_1, \dots, z_N\}$$

die Singularitäten, die von γ eingeschlossen werden, so gilt

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^M \operatorname{res}_{z_k^*} f.$$

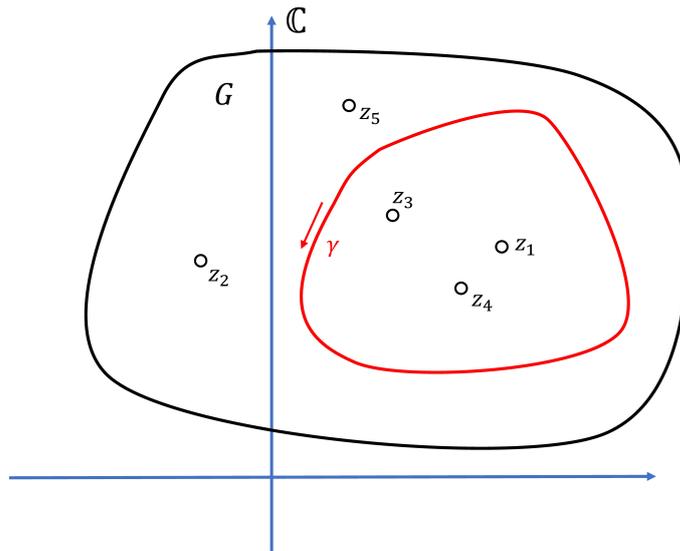


Abbildung 5.4: Zum Residuensatz - hier ist $\{z_1^*, z_2^*, z_3^*\} = \{z_1, z_3, z_4\}$.

Bemerkungen.

- i) Allein die Kenntnis der Residuen ermöglicht also die Berechnung des Kurvenintegrals.
- ii) Ist f holomorph auf G (keine Singularitäten) so erkennt man den Cauchyschen Integralsatz als Spezialfall.

Beispiele.

- i) Betrachtet sei das Standardbeispiel $f(z) = z^{-1}$. Das Residuum $\text{res}_0 f$ von f in $z_0 = 0$ ist der Koeffizient $a_{-1} = 1$ der Laurent-Reihe von f um $z_0 = 0$. Es folgt (vgl. Satz 2.5)

$$\int_{\kappa_\rho(0)} \frac{1}{\zeta} d\zeta = 2\pi i \text{res}_0 f = 2\pi i .$$

Es sei $f(z) = z^{-2}$. Hier gilt $\text{res}_0 f = 0$ (wegen $a_{-1} = 0$) und (vgl. wieder Satz 2.5)

$$\int_{\kappa_\rho(0)} \frac{1}{\zeta^2} d\zeta = 0 .$$

ii) Es sei $G = \mathbb{C}$ und

$$f(z) = \frac{e^z}{1+z^2}, \quad z \neq \pm i.$$

Nach Satz 5.2 gilt

$$\operatorname{res}_i \frac{e^z}{1+z^2} = \frac{e^z}{2z|_{z=i}} = \frac{e^i}{2i},$$

$$\operatorname{res}_{-i} \frac{e^z}{1+z^2} = -\frac{e^i}{2i}.$$

Es folgt

$$\int_{\kappa_3(i)} \frac{e^\zeta}{1+\zeta^2} d\zeta = 2\pi i \underbrace{\left[\frac{e^i}{2i} - \frac{e^{-i}}{2i} \right]}_{\frac{2i \sin(1)}{2i}} = 2\pi i \sin(1).$$

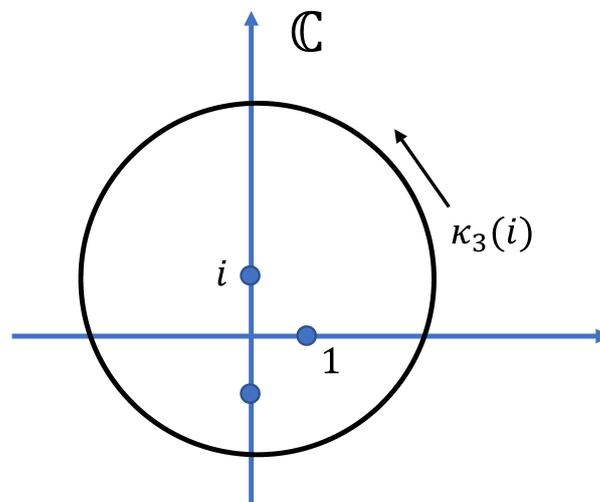


Abbildung 5.5: Ein Beispiel zum Residuensatz.

Der Residuensatz hilft auch bei der Berechnung reeller Integrale, beispielsweise gilt

Satz 5.4. Es sei $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ eine rationale Funktion mit Polynomen $P(z)$, $Q(z)$ und es gelte:

i) Q habe keine reelle Nullstelle:

ii) $\text{grad } Q \geq 2 + \text{grad } P$.

Sind dann z_1, \dots, z_N die Nullstellen von Q in der oberen Halbebene $\text{Im } z > 0$, so gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{res}_{z_k} \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

Bemerkung.

i) Ist der Grad von Q nur um eins höher als der Grad von P , so divergiert das Integral auf der linken Seite im Allgemeinen.

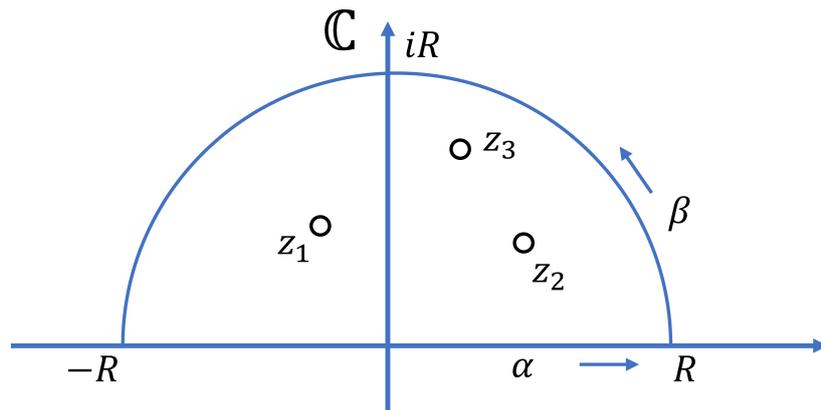
ii) Insbesondere besagt der Satz, dass das uneigentliche Integral auf der linken Seite existiert (als komplexe Zahl).

Beweis von Satz 5.4.

Man betrachte den in Abbildung 5.6 angedeuteten Weg „ $\gamma = \alpha + \beta$ “, wobei R hinreichend groß ist, dass die z_k , $k = 1, \dots, N$, umschlossen sind.

Mit der Notation $f = P/Q$ besagt der Residuensatz

$$\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{res}_{z_k} f.$$

Abbildung 5.6: Der Weg $\gamma = \alpha + \beta$.

Für den gewählten Weg γ kann geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(\zeta) \, d\zeta &= \int_{\alpha} f(\zeta) \, d\zeta + \int_{\beta} f(\zeta) \, d\zeta \\ &= \int_{-R}^R f(x) \, dx + \int_{\beta} f(\zeta) \, d\zeta, \end{aligned}$$

wobei die Parametrisierung $\alpha: [-R, R] \ni t \mapsto t$ gewählt wurde.

Als Parametrisierung β wählt man $\beta: [0, \pi] \ni t \mapsto Re^{it}$ und erhält

$$\begin{aligned} \left| \int_{\beta} f(z) \, dz \right| &= \left| \int_0^{\pi} \frac{P(Re^{it})}{Q(Re^{it})} iRe^{it} \, dt \right| \\ &\leq R \int_0^{\pi} \left| \frac{P(Re^{it})}{Q(Re^{it})} \right| \, dt. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist der Grad von Q um mindestens 2 höher als der von P und für R hinreichend groß folgt mit einer reellen Konstanten $c > 0$

$$\left| \frac{P(Re^{it})}{Q(Re^{it})} \right| \leq cR^{-2}.$$

Damit ist

$$\left| \int_{\beta} f(\zeta) \, d\zeta \right| \leq c\pi \frac{1}{R} \rightarrow 0 \quad \text{für } R \rightarrow \infty$$

und folglich Satz 5.4 bewiesen. \square

Beispiel.

Gesucht sei das reelle Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} \, dx .$$

Mit $P(z) = 1$, $Q(z) = (1+z^2)^2$ sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. In der oberen Halbebene liegt die Nullstelle $z = i$ mit der Vielfachheit 2.

Nach Satz 5.2 folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_i \frac{1}{(1+z^2)^2} &= \lim_{z \rightarrow i} \left[\frac{d}{dz} \left[(z-i)^2 \frac{1}{(1+z^2)^2} \right] \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \left[\frac{d}{dz} \left[(z-i)^2 \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2} \right] \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \left[\frac{d}{dz} \frac{1}{(z+i)^2} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \left[-\frac{2}{(z+i)^3} \right] = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4} . \end{aligned}$$

Es gilt also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} \, dx = 2\pi i \left(-\frac{i}{4} \right) = \frac{\pi}{2} .$$

Kapitel 6

Umkehrung elementarer Funktionen

Betrachtet man im Reellen die Funktion $y = x^2$, so ist die Frage nach der Umkehrfunktion eher übersichtlich: Für $y \geq 0$ sind die Funktionen $x = \sqrt{y}$ und $x = -\sqrt{y}$ Umkehrfunktionen, die für $y > 0$ differenzierbar sind.

Im Komplexen: Zu jedem $w_0 \in \mathbb{C} - \{0\}$ gibt es eine Kreisscheibe $B_r(w_0)$ und zwei auf $B_r(w_0)$ holomorphe Funktionen f_1, f_2 mit $[f_1(w)]^2 = [f_2(w)]^2 = w$ (siehe Abbildung 6.1).

Auf $\mathbb{C} - \{0\}$ gibt es jedoch keine holomorphe Funktion, die zu jedem w eine Quadratwurzel liefert.

Grundlegend für das Verständnis der Umkehrung elementarer Funktionen ist die Diskussion „des“ komplexen Logarithmus.

6.1 Der Logarithmus

Polarkoordinaten, Argument.

In der komplexen Ebene \mathbb{C} (identifiziert mit dem \mathbb{R}^2) können wie bereits in Kapitel 1.3 erläutert Polarkoordinaten betrachtet werden:

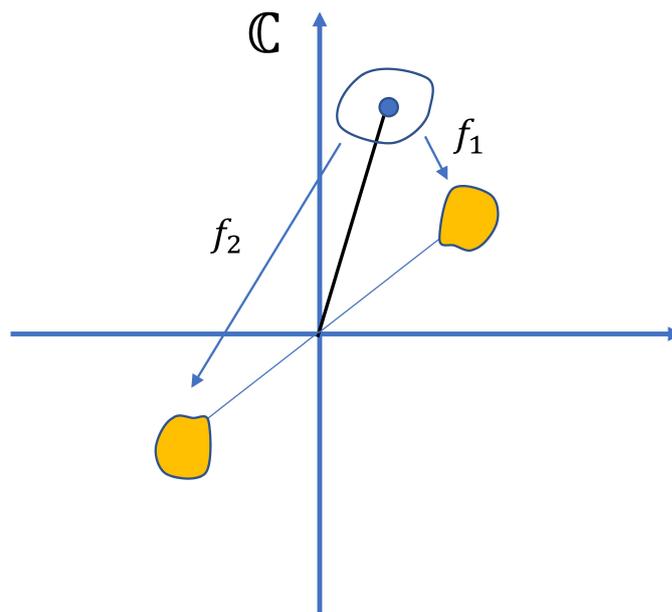


Abbildung 6.1: Umkehrfunktion.

Jede komplexe Zahl $z \neq 0$ wird dargestellt als

$$z = (x, y) = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)), \quad z = |z|(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)), \quad |z| \neq 0.$$

Dabei heißt

$$\varphi =: \arg z$$

ein Argument von z und ist lediglich bis auf Vielfache von 2π bestimmt.

Surjektivität un Bijektivität der Exponentialfunktion.

Eulerschen Formeln (Kapitel 1.3) besagen, dass mit der Notation $z = x + iy$

$$e^z = e^x(\cos(y) + i \sin(y)). \quad (1)$$

und man erkennt

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}, \quad \arg e^z = \operatorname{Im} z.$$

Man erkennt ebenfalls, dass die Exponentialfunktion die komplexe Zahlenebene \mathbb{C} surjektiv auf die Menge

$$\mathbb{C}^* := \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\}$$

abbildet.

Jeder Streifen der Form

$$\{z \in \mathbb{C} : a \leq \operatorname{Im} z < a + 2\pi\}$$

wird durch die Exponentialfunktion bijektiv auf \mathbb{C}^* abgebildet.

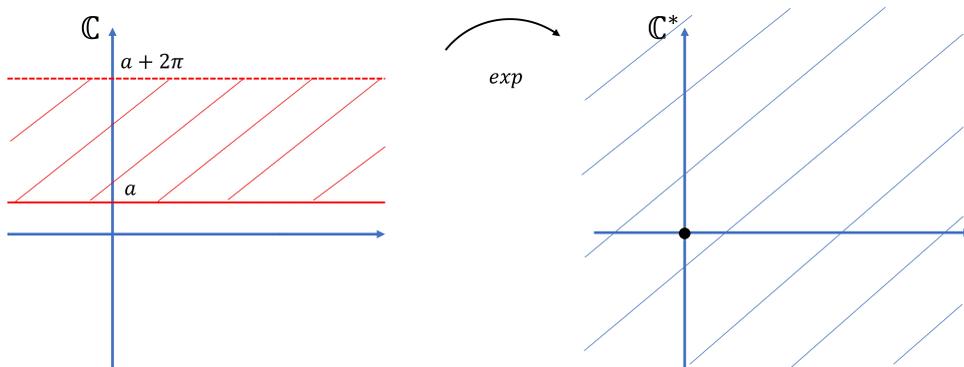


Abbildung 6.2: Zur Exponentialfunktion.

Urbilder von e^z .

Nach (1) ist für $z \in \mathbb{C}^*$ der Punkt $w = u + iv$ ein Urbild von z , d.h. $e^w = z$, falls

$$u = \log |z| \quad \text{und} \quad v \text{ irgendein Argument von } z \text{ ist.} \quad (2)$$

Es heißt dann w ein Logarithmus von z und nach (2) hat jeder Logarithmus von z die Gestalt

$$w = \log |z| + i \arg z, \quad (3)$$

wobei $\arg z$ ein Argument von z bezeichnet.

Demnach können sich unterschiedliche Logarithmen von z um ganzzahlige Vielfache von $2\pi i$ unterscheiden.

Beispielsweise gilt

$$\{\log(-2)\} = \left\{ \log(|2|) + \pi i + 2k\pi i : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Zur Funktionalgleichung des Logarithmus.

Es seien w_1 und w_2 Logarithmen von z_1 bzw. z_2 , d.h. es gilt

$$e^{w_1} = z_1, \quad e^{w_2} = z_2.$$

Dann gilt nach der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

$$e^{w_1+w_2} = e^{w_1} e^{w_2} = z_1 z_2$$

und folglich ist $w_1 + w_2$ ein Logarithmus von $z_1 z_2$.

Im Reellen (mit reellen Zahlen $x_1, x_2 > 0$) gilt umgekehrt auch die Funktionalgleichung des Logarithmus

$$\log(x_1 x_2) = \log(x_1) + \log(x_2).$$

Im Komplexen betrachte man als Beispiel die speziellen Logarithmen

$$w_1 = \frac{\pi}{2}i \quad \text{ist ein Logarithmus von } i,$$

$$w_2 = \log \sqrt{2} + \frac{3\pi}{4}i \quad \text{ist ein Logarithmus von } i - 1,$$

$$w_3 = \log \sqrt{2} - \frac{3\pi}{4}i \quad \text{ist ein Logarithmus von } -1 - i = i(i - 1).$$

Es gilt

$$w_1 + w_2 = w_3 + 2\pi i$$

und im Allgemeinen hat man im Komplexen die Funktionalgleichung des Logarithmus lediglich bis auf ganzzahlige Vielfache von $2\pi i$.

Der Logarithmus als stetige Funktion.

Ist $0 \notin G$, so kann man nach dem vorher gesagten viele unterschiedliche Funktionen definieren, die $z \in G$ auf einen Logarithmus von z abbilden.

Es stellt sich die Frage, ob man eine solche Zuordnung findet, die stetig oder ggf. holomorph ist. Dazu definiert man zunächst:

Definition 6.1. *Es sei $G \subset \mathbb{C}^*$ ein Gebiet und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion mit*

$$e^{f(z)} = z \quad \text{für alle } z \in G .$$

Dann heißt f ein Zweig des Logarithmus auf G .

Ist f ein solcher Zweig des Logarithmus auf G , so ist die Exponentialfunktion $\exp: f(G) \rightarrow G$ dessen Umkehrfunktion und demnach ist ein Zweig des Logarithmus injektiv.

Existiert nun auf $G \subset \mathbb{C}^*$ ein Zweig f des Logarithmus, so sind auch die Funktionen

$$f_k : G \rightarrow \mathbb{C} , \quad f_k(z) = f(z) + 2k\pi i , \quad k \in \mathbb{Z} ,$$

Zweige des Logarithmus auf G und jeder Zweig auf G muss von dieser Gestalt sein:

Sind nämlich $f(z)$ und $g(z)$ solche Zweige, so gilt für alle $z \in G$

$$e^{f(z)-g(z)} = 1 , \quad \text{d.h.} \quad f(z) - g(z) = 2\pi i k(z) , \quad k(z) \in \mathbb{Z} .$$

Als Zweige des Logarithmus sind f und g per definitionem stetige Funktionen, weshalb auch $k(z)$ eine stetige Funktion ist. Da aber $k(z)$ nur ganzzahlige Werte annimmt, ist k konstant und g ist wie behauptet von der Gestalt $f + 2k\pi i$.

Die Argumentfunktion.

In gleicher Art und Weise ist die Argumentfunktion zu diskutieren:

Definition 6.2. *Es sei $G \subset \mathbb{C}^*$ ein Gebiet und es gebe eine stetige Funktion $\varphi: G \rightarrow \mathbb{R}$ mit*

$$\varphi(z) \text{ ist ein Argument von } z \text{ f\u00fcr jedes } z \in G .$$

Dann hei\u00dft φ ein Zweig des Arguments auf G .

Die Definitionen 6.1 und 6.2 greifen ineinander im Sinne von:

Satz 6.3. *Es sei $G \subset \mathbb{C}^*$ ein Gebiet.*

Auf G gibt es genau dann eine stetige Argumentfunktion, wenn auf G ein Zweig des Logarithmus existiert.

Beweis. Es sei $\varphi: G \rightarrow \mathbb{R}$ ein Zweig des Arguments. Dann ist die Abbildung

$$z \mapsto \log |z| + i\varphi(z)$$

stetig auf G und folglich ein Zweig des Logarithmus.

Ist andererseits $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ ein Zweig des Logarithmus, so ist

$$z = e^{f(z)} = e^{\operatorname{Re} f(z)} \cdot e^{i \operatorname{Im} f(z)}$$

und folglich ist $|z| = e^{\operatorname{Re} f(z)}$ und die Funktion

$$z \mapsto \operatorname{Im} f(z)$$

ist eine stetige Argumentfunktion, da f stetig ist. □

Satz 6.4. *Es sei $G \subset \mathbb{C}^*$ ein Gebiet. Existiert auf G ein Zweig f des Logarithmus, so ist f holomorph auf G mit*

$$f'(z) = \frac{1}{z} \quad \text{für alle } z \in G .$$

Korollar 6.5. *Für ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}^*$ sind äquivalent:*

i) *Auf G existiert ein Zweig des Logarithmus.*

ii) *Die Funktion $z \mapsto 1/z$ hat eine Stammfunktion auf G .*

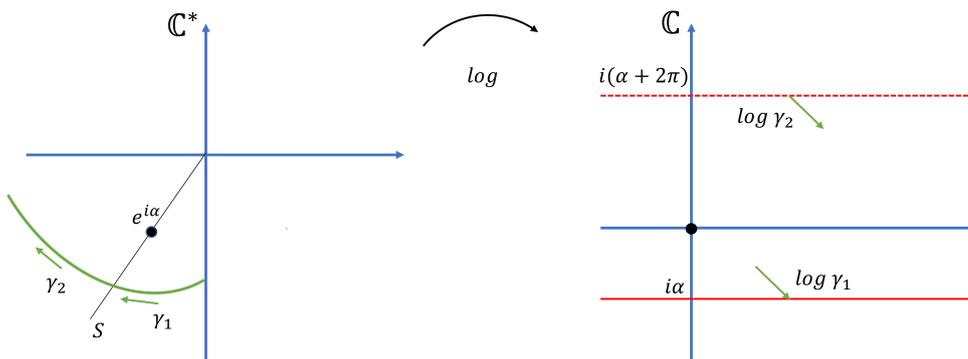


Abbildung 6.3: Zur „Sprung“ des Logarithmus.

Satz 6.6. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet.*

Ist f eine holomorphe Funktion auf G und hat f keine Nullstellen auf G , so existiert eine holomorphe Funktion

$$g : G \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad f(z) = e^{g(z)} \quad \text{für alle } z \in G .$$

6.2 Umlaufzahlen und Logarithmus

Die geometrische Charakterisierung derjenigen geschlossenen Integrationswege γ in einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$, für die

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = 0 \quad \text{für alle holomorphen } f : U \rightarrow \mathbb{C}$$

richtig ist, lautet: γ schließt keinen Punkt des Komplementes von U im Innern ein.

Dies soll in diesem abschließenden Abschnitt präziser dargestellt werden, was auch die Verallgemeinerung der Cauchyschen Integralformel verständlich macht.

Der wesentliche Begriff ist der einer Umlaufzahl, die zudem mit dem Logarithmus zusammen diskutiert wird.

Einfachstes Beispiel.

Zu fixiertem $r > 0$ und zu $k \in \mathbb{Z}$ betrachte man den Weg

$$\gamma_k : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto re^{ikt}.$$

Anschaulich gesprochen umläuft γ_k jedes $z \in B_r(0)$ genau k -mal, wobei das Vorzeichen von k die Orientierung der Umläufe angibt.

Punkte aus $\mathbb{C} - \overline{B_r(0)}$ werden hingegen nicht umlaufen.

Eine Kette ist eine endliche Ansammlung von Integrationswegen in U , denen eine ganze Zahl zugeordnet wird. Formal definiert man:

Definition 6.7. Eine Kette in $U \subset \mathbb{C}$ ist eine Abbildung

$$\Gamma : \{ \text{Integrationswege in } U \} \rightarrow \mathbb{Z},$$

die nur endlich vielen Integrationswegen eine von Null verschiedene Zahl zuordnet.

Relevant für die betrachteten Kurvenintegrale sind dabei natürlich nur die Integrationswege, denen nicht die Null zugeordnet ist.

Ein Integrationsweg γ wird mit einer Kette identifiziert, die γ den Wert 1 zuordnet und für alle anderen Integrationswege verschwindet.

Notation:

$$\Gamma = \sum_{j=1}^N k_j \gamma_j .$$

Die Spur einer Kette ist

$$\text{Spur } \Gamma = \bigcup_{k_j \neq 0} \text{Spur } \gamma_j$$

und man setzt

$$\int_{\Gamma} f(z) \, dz = \sum_{j=1}^N k_j \int_{\gamma_j} f(z) \, dz .$$

In Verallgemeinerung dieses einfachen Beispiels werden im Folgenden so genannte Zyklen, das sind geschlossene Ketten betrachtet.

Notation: Anfangs- und Endpunkt eines Weges γ werde dabei mit $A(\gamma)$ bzw. $E(\gamma)$ bezeichnet.

Definition 6.8. *Eine Kette*

$$\Gamma = \sum_{j=1}^N k_j \gamma_j$$

heißt geschlossen, wenn jeder Punkt $z \in \mathbb{C}$ unter Berücksichtigung der Vielfachheiten k_j ebenso oft als Anfangspunkt eine γ_k wie als Endpunkt

eines γ_k auftritt.

Die Bedingung kann für jeden festen Punkt z auch formal geschrieben werden in der Form

$$\sum_{l: z=A(\gamma_l)} k_l = \sum_{j: z=E(\gamma_j)} k_j . \quad (4)$$

Beispiele.

i) Bedingung (4) ist für alle Punkte z , die weder Anfangs- noch Endpunkt eines der γ_j sind, trivial erfüllt.

ii) Sind $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ Integrationswege, die zusammen einen geschlossenen Integrationsweg ergeben, so gilt

$$E(\gamma_j) = A(\gamma_{j+1}), \quad j = 1, \dots, N-1, \quad E(\gamma_N) = A(\gamma_1),$$

die Kette

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_N$$

ist demnach ein Zyklus.

Die Sätze 2.8 und 2.9 lauten für Gebiete G in der Verallgemeinerung für Zyklen:

Satz 6.9. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ sei stetig.*

Dann besitzt f genau dann eine Stammfunktion, wenn für alle Zyklen Γ in G gilt:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0 .$$

Umlaufzahl.

Wie in den Übungen wird nun definiert:

Definition 6.10. *Es sei Γ ein Zyklus und $z \in \mathbb{C} - \text{Spur } \Gamma$.*

Dann ist die Umlaufzahl von Γ bezüglich z gegeben durch

$$n(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta .$$

Man kann zeigen:

Satz 6.11. *Es sei Γ ein Zyklus und $z \in \mathbb{C} - \text{Spur } \Gamma$.*

Dann ist $n(\Gamma, z)$ eine ganze Zahl.

Umlaufzahl und Logarithmus.

Korollar 6.5 kann wie folgt ergänzt werden.

Korollar 6.12. *Für ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}^*$ sind äquivalent:*

i) Die Funktion $z \mapsto 1/z$ hat eine Stammfunktion auf G .

ii) Für jeden Zyklus Γ in G ist $n(\Gamma, 0) = 0$.

Beweis. Per definitionem gilt

$$n(\Gamma, 0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\Gamma} \frac{dz}{z} = 0 .$$

Nach Satz 6.9 gilt aber

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z} = 0 \text{ für alle Zyklen } \Gamma \text{ in } G \Leftrightarrow \frac{1}{z} \text{ hat eine Stammfunktion.}$$

□

Literaturverzeichnis

- [AHKCLS] Arens, T., Hettlich, F., Karpfinger, C., Kockelkorn, U., Lichtenegger, K., Stachel, H.; Mathematik. 4te Auflage, Springer Spektrum, 2018.
- [Bi] Bildhauer, Michael; Vorlesungsskript zur HMI, Universität des Saarlandes.
- [BHWM] Burg, K., Haf, H., Wille, F., Meister, A.; Funktionentheorie, Höhere Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler und Mathematiker, 2te aktualisierte Auflage, Springer Vieweg, Wiesbaden 2013.
- [FL] Fischer, G., Lieb, I.; Einführung in die komplexe Analysis. Vieweg+Teubner, Wiesbaden 2010.
- [Fo] Forster, O.; Analysis 1, Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen. 12te Auflage, Springer Spektrum, 2016.
- [FB] Freitag, E., Busam, R.; Complex analysis. Second edition, Universitext, Springer, Berlin Heidelberg 2009.
- [HSZ] Hackbusch, W., Schwarz, H.R., Zeidler, E.; Teubner-Taschenbuch der Mathematik. Teubner, Wiesbaden 2003.
- [Hi] Hildebrandt, S., Analysis 2. Springer, Berlin Heidelberg New York, 2000.
- [CB] Campusbibliothek für Informatik und Mathematik, Semesterapparat,
<https://www.infomath-bib.de/tmp/vorlesungen.html>