UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Moritz Weber
M.Sc. Luca Junk

Höhere Mathematik für Ingenieur:innen IV b
Sommersemester 2024

Übungsblatt 1
Abgabe 03.05.24 bis 12 Uhr in den Briefkästen in E2 5

Dieses Blatt dient der Wiederholung von Konzepten, die aus früheren Veranstaltungen bekannt sein sollten und für diese Veranstaltung vorausgesetzt werden. Insbesondere ist noch kein Stoff aus dieser Veranstaltung notwendig, um die Aufgaben zu lösen.

Erinnerung. Der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ besteht aus allen Objekten der Form $z = x + \mathrm{i}y = x + y\mathrm{i}$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$. Hierbei heißt

- $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ die *imaginäre Einheit*,
- $\mathrm{Re}(z) := x \in \mathbb{R}$ der *Realteil* von z,
- $\mathrm{Im}(z) := y \in \mathbb{R}$ der *Imaginärteil* von z,
- $|z| := \sqrt{x^2 + y^2} \in [0, \infty)$ der *Betrag* von z,
- $\overline{z} := x - \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ die zu z *komplex konjugierte* Zahl.

Mit der definierenden Eigenschaft $\mathrm{i}^2 = -1$ erhält man die Summe und das Produkt von $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ und $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$, wobei $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, mittels

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2) \quad \text{sowie} \quad z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ kann eindeutig in *Polarkoordinaten* geschrieben werden als

$$z = r \cdot (\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)),$$

wobei $r := |z|$ der Betrag und $\varphi \in [0, 2\pi)$ das *Argument* oder der *Winkel* von z ist.

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie für alle $z, w \in \mathbb{C}$:

(a) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

(b) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

(c) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

(d) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

(e) $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ (falls $z \neq 0$)

(f) $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$

Bitte wenden.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Bestimmen Sie $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $\overline{z}$ und $|z|$ für:

(a) $z = \frac{5+3\mathrm{i}}{2-4\mathrm{i}}$

(b) $z = 2(\cos(\frac{\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{4}))$

(c) $z = (4+3\mathrm{i}) \cdot (\overline{1+2\mathrm{i}})$

(d) $z = \left(\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{2024}$

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Die *Eulersche Formel* besagt: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(\mathrm{i}x) = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x).$$

(a) Leiten Sie die Eulersche Formel aus den folgenden (komplexen) Potenzreihen der involvierten Funktionen her: Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad \cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \quad \text{und} \quad \sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Hinweis: Die Reihen sind absolut konvergent, daher kann man ihre Glieder beliebig vertauschen und neu kombinieren.

(b) Leiten Sie aus der Eulerschen Formel den *Satz von de Moivre* her: Für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x))^n = \cos(nx) + \mathrm{i}\sin(nx).$$

(c) Sei $z = r\exp(\mathrm{i}\varphi) \in \mathbb{C}$ mit $r \in (0, \infty)$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$. Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ erfüllt die komplexe Zahl

$$w = \sqrt[n]{r}\left(\cos(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\varphi + 2\pi k}{n})\right)$$

die Gleichung $w^n = z$.

(d) Leiten Sie aus der Eulerschen Formel die *Additionstheoreme* für Sinus und Kosinus her: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

sowie

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Bestimmen Sie jeweils die Jacobi-Matrix Df der folgenden Abbildungen:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x^3y + 7y^2 \\ y^2 - 5xy + 1 \end{pmatrix}$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \dfrac{x^2}{y^2+1} - \dfrac{y^2}{x^2+\exp(-y)} \\ \sin(y^2 + \ln(x^2+1)) \end{pmatrix}$