UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Moritz Weber
M.Sc. Luca Junk

Höhere Mathematik für Ingenieur:innen IV b
Sommersemester 2024

Übungsblatt 2
Abgabe 22.05.24 bis 12 Uhr in den Briefkästen in E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.**

(a) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in U$. Beweisen Sie folgende Aussagen für zwei Funktionen $f, g : U \to \mathbb{C}$, die im Punkt z_0 differenzierbar sind:

(i) Linearität: Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ist auch $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ im Punkt z_0 differenzierbar mit
$$(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)'(z_0) = \alpha \cdot f'(z_0) + \beta \cdot g'(z_0).$$

(ii) Produktregel: Die Funktion $f \cdot g$ ist im Punkt z_0 differenzierbar mit
$$(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0).$$

(iii) Komplexer L'Hospital: Gilt $f(z_0) = g(z_0) = 0$, aber $g'(z_0) \neq 0$, so folgt
$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

(b) Zeigen Sie mit der Definition (der komplexen Differenzierbarkeit), dass folgende Funktion nirgendwo komplex differenzierbar ist:
$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \mathrm{Re}(z).$$

(c) Folgern Sie, dass auch $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \mathrm{Im}(z)$ nirgendwo komplex differenzierbar sein kann.

Hinweis: Was ist $\mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$*?*

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.**

(a) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit
$$f(x + \mathrm{i}y) := u(x) + \mathrm{i}v(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}),$$
wobei $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $f(z) = \lambda z + w$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ und ein $w \in \mathbb{C}$ gelten muss.

Bitte wenden.

(b) Seien $a, b, c \in \mathbb{C}$ und

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad x + \mathrm{i}y \mapsto ax^2 + by^2 + cxy \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

(i) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

(ii) Untersuchen Sie, für welche Werte von a, b und c die Funktion f holomorph ist.

(iii) Schreiben Sie f im holomorphen Fall wie in (a) als Funktion von z.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden Funktionen (also u und v in der Darstellung $f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$):

(a) $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1}{z}$

(b) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto |z|$

(c) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^n$ für $n \in \mathbb{N}$

(d) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \overline{\exp(z^2)}$

Aufgabe 4 (*10 Bonuspunkte*)**.** Bestimmen sie alle Punkte im jeweiligen Definitionsbereich, in denen die folgenden Funktionen komplex differenzierbar sind:

(a) $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto |z|$

(b) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ x + \mathrm{i}y \mapsto y^2 \sin(x) + \mathrm{i}y$

(c) $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ x + \mathrm{i}y \mapsto \frac{x}{y} + \mathrm{i}xy$

(d) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ x + \mathrm{i}y \mapsto x^2 - \mathrm{i}y^2$

(e) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ x + \mathrm{i}y \mapsto x^3 - 3xy^2 + \mathrm{i}(3x^2y - y^3)$

Hinweis: Nutzen Sie die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen.