Arbeitsblatt zur Vorlesung

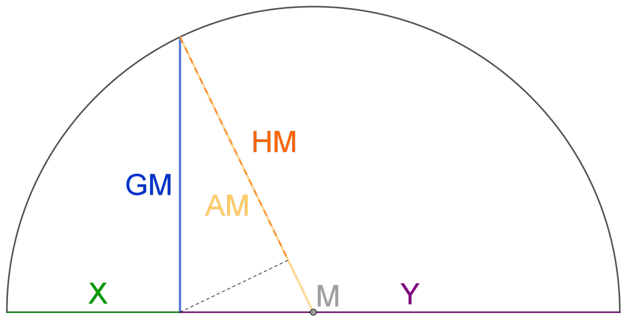
Mittelwerte, Funktionen als Objekte, parametrisierte Familien

Im Rahmen des Vorkurses Mathematik für Studierende der Mathematik

Arbeitsauftrag 1 *Klassiker*

Beweisen Sie die Ungleichungskette der Mittelwerte formal-algebraisch sowie visuell-geometrisch.

Für $x < y$ *gilt* $x < HM < GM < AM < y$.



Arbeitsauftrag 2 *In Mitten von Mitten*

a) Beweisen Sie, dass

$AM(x,y) = \frac{x+y}{2}$, $GM(x,y) = \sqrt{xy}$, $HM(x,y) = \frac{2xy}{x+y}$ und $QM(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$ kommutative Mittelwertfunktionen sind, indem Sie zeigen, dass diese die Axiome (M1), (M2) und (M3) erfüllen.

b) Geben Sie eine Mittelwertfunktion an, die nicht kommutativ ist. Dazu müssen Sie zeigen, dass Ihre Mittelwertfunktion (M1) und (M2) aber nicht (M3) erfüllt.

c) Beweisen Sie: Wenn MW_1, MW_2 und MW_3 Mittelwertfunktionen sind, dann wird auch über $MW(x,y) \coloneqq MW_3(MW_1(x,y), MW_2(x,y))$ eine Mittelwertfunktion definiert. Ist diese ebenfalls kommutativ?

d) Es gilt $HM(x,y) = \frac{GM(x,y)^2}{AM(x,y)}$. Gilt allgemein: Wenn MW_1 und MW_2 Mittelwertfunktionen sind, dann wird über $MW(x,y) = \frac{MW_1(x,y)^2}{MW_2(x,y)}$ eine Mittelwertfunktion definiert?

Arbeitsauftrag 3 *Beweise*

Arbeiten Sie den Beweis zu

Satz 2: Jede Mittelwertfunktion ist eine CHUQUET-Funktion

aus der Vorlesung (Arbeitsblatt) durch. Klären Sie dabei alle Beweisschritte und verwendeten Strategien.

Arbeitsauftrag 4 *Viele Mitten*

a) Formen Sie $AM(x,y) = \frac{x+y}{2}$, $HM(x,y) = \frac{2xy}{x+y}$ und $QM(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$ so um, dass man erkennt, dass sie dem gleichen formalen Muster genügen, d.h. dass sie alle Beispiele zu einer mit $p \in \mathbb{R}$ parametrisierten Familie der p-Potenz-Mittel sind.

b) Erklären Sie anhand einer geeigneten Visualisierung, wie auch $GM(x,y)$ in die Familie passt. Sie können dazu GeoGebra verwenden.