Arbeitsblatt zur Vorlesung

Zahlbereichserweiterungen und Mächtigkeit von Mengen

Im Rahmen des Vorkurses Mathematik für Studierende der Mathematik

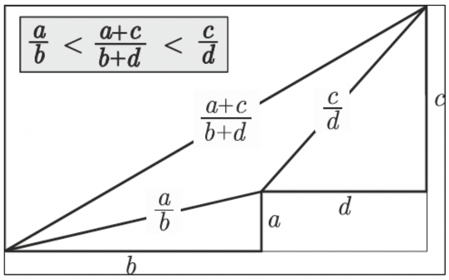
Arbeitsauftrag 1 *Noch mehr Mitten*

a) Beweisen Sie die Mittelwertregel von Chuquet (für positive Zahlen a, b, c, d)

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

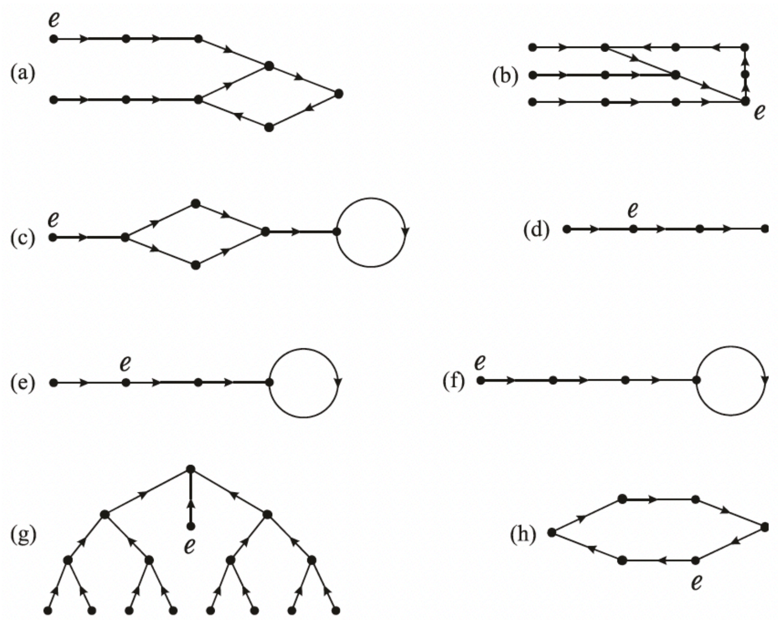
algebraisch durch Termumformungen.

b) Erklären Sie eine mögliche inhaltliche Bedeutung des Chuquet-Mittelwerts, indem Sie die Brüche in nebenstehender Visualisierung (Aus: Hischer H. (2021): Grundlegende Begriffe der Mathematik: Entstehung und Entwicklung. Struktur – Funktion – Zahl. Springer, Berlin, S. 241.) als Steigungen interpretieren.



Arbeitsauftrag 2 *Strukturen*

Nachfolgend sind acht Strukturen $(M, e, \rightarrow)$ als Kettenmodelle abgebildet, wobei e jeweils für das Anfangselement steht. Geben Sie für jede Struktur an, welche der fünf Dedekind-Peano-Axiome erfüllt sind und welche nicht.



Aus: Hischer H. (2021): Grundlegende Begriffe der Mathematik: Entstehung und Entwicklung. Struktur – Funktion – Zahl. Springer, Berlin, S. 215.

***Arbeitsauftrag 3** Gedankenexperiment im Unendlichen*

Hilberts Hotel (nach David Hilbert) ist ein Hotel mit abzählbar unendlich vielen Zimmern, durchnummeriert mit natürlichen Zahlen bei 1 beginnend. Das Hotel ist voll belegt, aber die Gäste können beliebig innerhalb des Hotels umquartiert werden.

a) Nun kommt ein weiterer Gast an, der im Hotel übernachten möchte. Wie können die anderen Bewohner umziehen, so dass ein Zimmer für ihn frei wird?

Wie kann verfahren werden, wenn

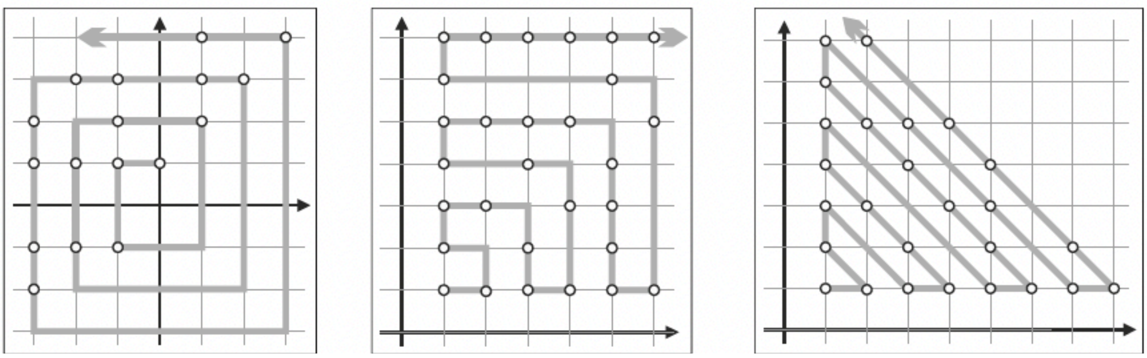
b) ein Bus mit n Gästen,
c) ein großer Bus mit abzählbar unendlich vielen Gästen
d) n große Busse mit je abzählbar unendlich vielen Gästen
e) Abzählbar unendlich viele große Busse mit je abzählbar unendlich vielen Gästen

ankommen?

***Arbeitsauftrag 4** Beweise rund um Zahlbereichserweiterungen*

a) $\mathbb{Q}$ ist dicht. Dennoch bedecken die rationalen Zahlen die Zahlengerade nicht vollständig. Beweisen Sie, dass gilt $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, indem Sie annehmen, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist; sich also als vollständig gekürzter Bruch (formal: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$) darstellen lässt und führen Sie diese Annahme über Teilbarkeitsargumente zu einem Widerspruch.

b) $\mathbb{Q}$ ist abzählbar. Geben Sie, wie in der Vorlesung angedeutet, ein passendes Abzählverfahren an. Interpretieren Sie dazu die Brüche als Gitterpunkte und durchlaufen Sie diese spiralförmig oder diagonal (wie in den Visualisierungen angedeutet). Werden dabei alle rationalen Zahlen erfasst? Modifizieren Sie ggf. das Verfahren. Können rationale Zahlen dabei doppelt gezählt werden?



Aus: Hischer H. (2021): Grundlegende Begriffe der Mathematik: Entstehung und Entwicklung. Struktur – Funktion – Zahl. Springer, Berlin, S. 409.

c) In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass die Mengen $]0;1[$ und $\mathbb{R}$ gleichmächtig sind. Um zu untersuchen, ob $\mathbb{R}$ abzählbar oder überabzählbar ist, können wir nun das offene Intervall $]0;1[$ auf seine Mächtigkeit untersuchen. Analysieren Sie den abgebildeten Beweis, indem Sie die Beweisschritte sowie die verwendeten Strategien klären. Was wird bewiesen? Ist $]0;1[$ und damit $\mathbb{R}$ nun abzählbar oder überabzählbar?

Um $\mathbb{R}$ auf Abzählbarkeit oder Überabzählbarkeit zu untersuchen, kann man also gleichwertig das offene Intervall $]0;1[$ untersuchen. Dazu nutzen wir naiv die geläufige Tatsache aus, dass sich jede positive reelle Zahl, die kleiner als 1 ist, als Dezimalbruch $0,a_1a_2a_3\ldots$ mit Dezimalziffern $a_1, a_2, a_3, \ldots \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ darstellen lässt, wobei diese Darstellung sogar stets eindeutig ist, sofern „Neuner-Perioden" ausgeschlossen werden, denn z. B.:

$$0,\overline{9} = 9 \cdot 0,\overline{1} = 9 \cdot \Sigma_{\nu=1}^{\infty}\left(\tfrac{1}{10}\right)^{\nu} = 9 \cdot \left(-1 + \Sigma_{\nu=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{10}\right)^{\nu}\right) = 9 \cdot \left(-1 + \frac{1}{1-\frac{1}{10}}\right) = 9 \cdot \frac{10}{9} = 1$$

In der Menge dieser Dezimalbrüche tritt aber auch die 0 als $0,\overline{0}$ auf, so dass wir anstelle von $]0;1[$ das halboffene Intervall $[0;1[$ betrachten. Wäre diese Menge abzählbar, so gäbe es eine Folge $\langle x_n \rangle$ über $\mathbb{N}^*$ mit $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}^*\} = [0;1[$ und $x_m = x_n \Leftrightarrow m = n$. Die Folgenglieder x_n könnten wir dann in einer Liste gemäß dem Reißverschlussmodell wie nebenstehend anordnen. Dabei würde also $a_{\mu\nu} \in \{0,1,2,\ldots,9\}$ gelten.

$$\begin{array}{lcl}
x_1 & = & 0,a_{11}a_{12}a_{13}\ldots a_{1n}\ldots \\
x_2 & = & 0,a_{21}a_{22}a_{23}\ldots a_{2n}\ldots \\
x_3 & = & 0,a_{31}a_{32}a_{33}\ldots a_{3n}\ldots \\
\vdots & & \\
x_m & = & 0,a_{m1}a_{m2}a_{m3}\ldots a_{mn}\ldots \\
\vdots & &
\end{array}$$

Bild 8.5: Zur Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$

Wir definieren nun $x := 0,a_1a_2a_3\ldots \in [0;1[$ durch

$a_n := \begin{cases} 1, & \text{falls } a_{nn} = 0 \\ 0, & \text{falls } a_{nn} \neq 0 \end{cases}$. Dann ist $x \neq x_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$, obwohl $x \in [0;1[$. Widerspruch!

Aus: Hischer H. (2021): Grundlegende Begriffe der Mathematik: Entstehung und Entwicklung. Struktur – Funktion – Zahl. Springer, Berlin, S. 411.

Hinweis: Wenn Sie sich im Uni-Netz befinden (vor Ort, oder über den VPN-Client des HIZ: https://www.hiz-saarland.de/dienste/vpn) dann können Sie sich das hier zitierte Buch sowie viele weitere für das Mathematikstudium kostenlos als PDF downloaden unter: https://link.springer.com/