aus: Hischer, H und Lambert, A.: Was ist ein numerischer Mittelwert? Zur axiomatischen Präzisierung einer fundamentalen Idee, Preprint Nr. 99, Saarbrücken 2003

4 Chuquet-Funktionen und Mittelwertfunktionen

Wir knüpfen an folgenden über das *Chuquet-Mittel* und die *pythagoreischen Mesotäten* heuristisch gewonnenen konkreten Ansatz [27] für M an (vgl. Eingangszitat):

$$M(x,y) := \frac{x+sy}{1+s} \text{ mit } s := S(x,y) > 0 \text{ und } S : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+ \qquad (1)$$

Die Bezeichnungen s und S wurden in Anlehnung an „Streckfaktor" gewählt. Das führt uns zur nächsten Definition:

***Definition 3**: Es sei $M : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$.*

*M ist genau dann eine **Chuquet-Funktion**, wenn eine Funktion S mit $S : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ existiert, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}_+$ gilt:*

$$M(x,y) = \frac{x + y \cdot S(x,y)}{1 + S(x,y)}$$

Schreiben wir hier kurz $m := M(x,y)$, so ist

$$m = \frac{x+sy}{1+s}$$

eine lineare Gleichung in s, d. h., darüber ist jede der beiden Funktionen M und S jeweils für $x \neq y$ [28] durch die andere *eindeutig bestimmt*. Wir nennen S die „**Streckfaktorfunktion von M**" und M die „**Chuquetfunktion von S**".

Das arithmetische Mittel liefert uns ein erstes Beispiel für eine Chuquet-Funktion, denn es ist

$$A(x,y) = \frac{x+y}{1+1},$$

also ist hier

$$S(x,y) = 1$$

(jeweils für alle $x, y \in \mathbb{R}_+$), so dass auch dieser neue Begriff nicht inhaltsleer ist.

Wir kommen nun auf das Eingangszitat zurück:

> ... liegt also die Vermutung nahe, daß sich numerische Mittelwerte stets als Chuquet-Mittel auffassen lassen und auch umgekehrt – daß also das Chuquet-Mittel eine allgemeine Form eines numerischen Mittelwerts ist.

---

27 Vgl. [Hischer 2002 b, 35].

28 $S(x,x)$ ist beliebig wählbar. Wir kommen noch darauf zurück!

Es sei daher zunächst M eine beliebige Chuquet-Funktion und S ihre Streckfaktorfunktion. Unter welchen Bedingungen ist M eine *Mittelwertfunktion* oder gar eine *kommutative Mittelwertfunktion*? Das ist gleichwertig mit der Frage: Welchen Bedingungen muss die Streckfaktorfunktion S genügen, damit M eine Mittelwertfunktion bzw. eine kommutative Mittelwertfunktion ist? Zunächst zeigt sich:

***Satz 1**: Jede Chuquet-Funktion ist eine Mittelwertfunktion.*

Beweis:

Es seien M und S beliebige Funktionen gemäß Definition 3. Wir müssen prüfen, ob die Axiome (**M1**) und (**M2**) erfüllt sind. Dazu wählen wir $x, y \in \mathbb{R}_+$ beliebig, ferner $s := S(x,y)$ und $\tilde{s} := S(y,x)$.

Insbesondere ist damit $M(x,y) := \dfrac{x + sy}{1+s}$ und $M(y,x) := \dfrac{y + \tilde{s}x}{1+\tilde{s}}$

Die Gültigkeit von (**M2**) ist erwartungsgemäß leicht zu erkennen:

$$M(x,x) = \frac{x + x \cdot S(x,x)}{1 + S(x,x)} = x$$

Wir wenden uns nun (**M1**) zu: Aus $x < y$ folgt zunächst (wegen $y - x > 0$)

$$x < x + \frac{s}{1+s}(y-x) = \frac{x(1+s) + s(y-x)}{1+s} = \frac{x + s(x+y-x)}{1+s} = \frac{x+sy}{1+s} = M(x,y)$$

und analog

$$x < x + \frac{(y-x)}{1+\tilde{s}} = \frac{x + (y-x) + \tilde{s}x}{1+\tilde{s}} = \frac{y + \tilde{s}x}{1+\tilde{s}} = M(y,x).$$

Weiterhin folgt (wegen $x - y < 0$)

$$M(x,y) = \frac{x+sy}{1+s} = \frac{x - y + y + sy}{1+s} = \frac{(1+s)y}{1+s} + \frac{x-y}{1+s} < y$$

und analog

$$M(y,x) = \frac{y + \tilde{s}x}{1+\tilde{s}} = \frac{y + \tilde{s}y - \tilde{s}y + \tilde{s}x}{1+\tilde{s}} = y + \frac{\tilde{s}}{1+\tilde{s}}(x-y) < y.$$

◆

Damit haben wir zwar einen Beweis dafür erbracht, dass M eine Mittelwertfunktion ist, aber seien wir ehrlich: Wir haben es nicht so bewiesen, wie es hier steht – denn wir haben den (bei Dozenten beliebten und bei Studenten gehassten) Trick des *Deus ex Machina* verwendet!

Satz 2: *Jede Mittelwertfunktion ist eine Chuquet-Funktion.*

Beweis:

M sei eine beliebige Mittelwertfunktion, und ferner seien $x, y \in \mathbb{R}_+$ beliebig gewählt und zunächst $x < y$. Setzen wir $m := M(x, y)$, so gilt $x < m < y$ wegen (**M1**).

29 Wie man allerdings *im Nachhinein* leicht sieht ☺

Somit existiert ein $\lambda \in]0;\, 1[$ mit[30] $m = x + \lambda \cdot (y - x) = (1-\lambda)\cdot x + \lambda \cdot y$.[31]
Wir müssen noch zeigen, dass die am Chuquet-Mittel (1) orientierte Darstellung $m = \frac{x+sy}{1+s}$ mit einem $s \in \mathbb{R}_+$ möglich ist (dabei sind s und λ i. d. R. Terme in x und y). Koeffizientenvergleich von $(1-\lambda)\cdot x + \lambda \cdot y$ mit $\frac{x+sy}{1+s}$ führt damit auf die äquivalenten Gleichungen

$$1 - \lambda = \frac{1}{1+s} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{s}{1+s},$$

was mit $\lambda \in]0;\, 1[$ schließlich $s = \frac{\lambda}{1-\lambda} \in \mathbb{R}_+$ liefert.

Es bleibt noch der Fall $x = y$ zu betrachten: Hier ist $m = (1-\lambda)\cdot x + \lambda \cdot y$ für alle $\lambda \in]0;\, 1[$, und damit ist $s = \frac{\lambda}{1-\lambda} \in \mathbb{R}_+$ beliebig wählbar.

◆

Wir haben somit das Eingangszitat bestätigt: *Mittelwertfunktionen* und die auf das Chuquet-Mittel zurückgehenden *Chuquetfunktionen* sind (im Wesentlichen) dasselbe! Mit Hilfe des Chuquet-Mittels, das sich seinerseits bereits in der pythagoreischen Mesotätentheorie findet, können wir also sämtliche numerischen Mittelwerte beschreiben.

---

30 m ist eine *echte Konvexkombination* von x und y, und wir haben formal einen geometrischen Zugang zur Situation, der ein Verallgemeinerungspotenzial in sich birgt.

31 Wegen $y - x > 0$ ist $(1-\lambda)\cdot x + \lambda \cdot y = x + \lambda \cdot (y - x) > x$. Und $m < y$ können wir auch wie folgt sehen: $(1-\lambda)\cdot x + \lambda \cdot y < y \Leftrightarrow (1-\lambda)\cdot x < (1-\lambda)\cdot y \Leftrightarrow x < y$ (wegen $\lambda < 1$!).