Inzidenzgeometrie

Ziel der Geometrie seit Euklid (~300 v. Chr.): Beweisen

Axiome (Grundannahmen) $\Longrightarrow$ gültige Aussagen

↑ logischen Schlussweisen

z.B.

$a = b \Rightarrow \alpha = \beta$

$a = b \Rightarrow$ Winkelhalbierende … SWS $\Rightarrow \alpha = \beta$

allg.: $A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow A_3$, dann $A_1 \Rightarrow A_3$

"Transitivität"

oder „Kontraposition" $A_1 \Rightarrow A_2$, dann $\neg A_2 \Rightarrow \neg A_1$

↳ Thales: Halbkreis $\Rightarrow$ rechter Winkel

kein rechter Winkel $\Rightarrow$ kein Halbkreis

Wo kommen die Axiome her?

Euklid: abstrahiert Eigenschaften von Objekten

Punkt · „was keine Teile hat"

Geraden „unendliche Linie"

Frage zu diesen Objekten:

Wie viele Parallelen durch den Punkt?

Anschauung: Eine! Kann ich das beweisen? Nein!

Wie kann man erfolgreich Axiome festlegen?

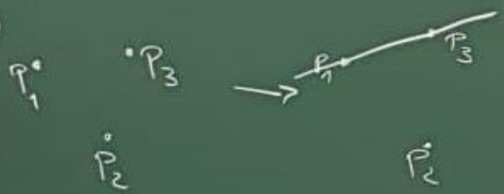
Idee bei Hilbert: Eigenschaften von Objekten sind egal, es kommt auf die Beziehungen an.

① 

Zu zwei Punkten existiert genau eine Gerade.

② 

Auf jeder Geraden liegen mindestens zwei Punkte.

③ 

Es gibt drei Punkte, die nicht auf derselben Geraden liegen.

Relation $R \subseteq \{A, B, C\} \times \{AB, AC, BC\}$

Inzidenzrelation $I = \{(A, AB), (A, AC), (B, AB), (B, BC), (C, AC), (C, BC)\}$

Allgemeiner: M_1, M_2 Mengen, Inzidenzrelation ist eine Teilmenge von $M_1 \times M_2$

Bsp: $M_1 = \{A, B, C, D\}$, $M_2 = \{AB, AC, AD, BC, BD, CD\}$

Inzidenzgraph

(Tetraeder-)modell

Inzidenztafel

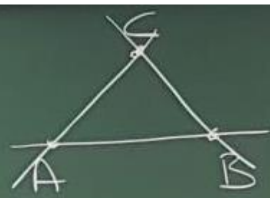
	AB	AC	AD	BC	BD	CD
A	+	+	+	−	−	−
B	+	−	−	+	+	−
C	−	+	−	+	−	+
D	−	−	+	−	+	+

③ $\Rightarrow$ es gibt drei Punkte A, B, C

① $\Rightarrow$ Geraden AB, AC, BC

②: $AB \rightsquigarrow A,B$, $AC \rightsquigarrow A,C$, $BC \rightsquigarrow B,C$

③: auf AB liegt nicht C



"Minimalgeom
(Inzidenzgraph

	AB	AC	BC
A	+	+	−
B	+	−	+
C	−	+	+

	violett	orange	grün
rot	+	+	−
blau	+	−	+
gelb	−	+	+

(Inzidenztafeln)

① z.B zu A&B gibt es nur ein "Doppelplus"

② in jeder Spalte sind (mindestens) zwei "+"

③ C liegt nicht auf AB.

Inzidenzaxiome:

$\mathbb{P}$ Menge der "Punkte" (Großbuchstaben), $\mathbb{G}$ Menge der "Geraden" (Kleinbuchstaben)

(I1) $\forall A,B \in \mathbb{P}$ mit $A \neq B$ gilt: $\exists!\, a \in \mathbb{G}$, sodass $A\,I\,a \wedge B\,I\,a$.

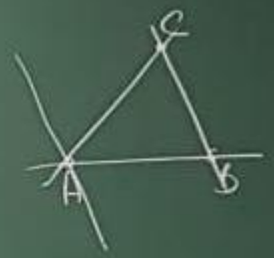
(I2) $\forall a \in \mathbb{G}$ gilt: $\exists\, A,B \in \mathbb{P}$ mit $A \neq B$, sodass $A\,I\,a \wedge B\,I\,a$.

(I3) $\exists\, A,B,C \in \mathbb{P}$ paarweise verschieden sowie $a \in \mathbb{G}$, sodass
$A\,I\,a \wedge B\,I\,a \wedge C\,\not{I}\,a$.

Eine Relation I mit (I1) bis (I3) heißt Inzidenzgeometrie.

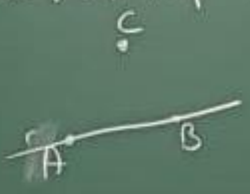
Sind (I1), (I2), (I3) unabhängig?

i) (I1) & (I2) erfüllt, (I3) nicht.



ii) (I1) & (I3) erfüllt, (I2) nicht.

iii) (I2) & (I3) erfüllt, (I1) nicht.



Ist die Parallele durch einen Punkt immer eindeutig?

Zunächst eine Definition: Zwei Geraden $a, b \in G$ heißen parallel, wenn $a = b$ oder $\nexists A \in P$ mit $A I a \wedge A I b$.

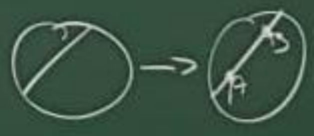
Dann ein Gegenbeispiel: "Bierdeckelgeometrie" (nach Klein)

P: Punkte innerhalb eines Kreises der euklidischen Ebene

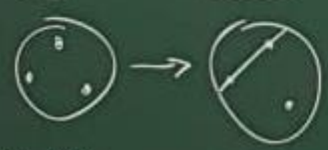
G: Sehnen ———————— " ————————

Gelten die Axiome?

(I1)✓



(I2)✓



(I3)✓

Aber nun:

Es gibt beliebig viele Parallelen.

Die Aussage $\forall b \in G,\ A \in P$ gilt: $\exists!\, a \in G$ mit $a I A \wedge a \parallel b$ ist also ein Axiom! ("Parallelenaxiom"), Minimalmodell: Tetraedermodell