



Übungen zum Vorkurs für Mathematik  
Wintersemester 2023/2024

Blatt 6

Besprechung: Donnerstag, 19.10.2022 in den Übungsgruppen

---

**Aufgabe 1.** Fertigen Sie eine Tabelle aller Verknüpfungen  $g \circ h$  für  $g, h \in D_4$  an. Lesen Sie daran das neutrale Element und die inversen Elemente ab und überzeugen Sie sich, dass  $D_4$  eine nicht-abelsche Gruppe ist.

**Aufgabe 2.** Überprüfen Sie, ob die folgenden Objekte Gruppen sind. Welche sind abelsch?

- (a)  $(\mathbb{Z}, \cdot)$ , wobei  $\cdot$  die Multiplikation auf  $\mathbb{Z}$  ist.
- (b)  $(\mathbb{Q}, +)$ .
- (c)  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ .
- (d)  $\mathbb{Z}^2$  versehen mit  $(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ , für  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$ .

**Aufgabe 3.** Es seien

$$X_1 := \{1, 2, 3\}, \quad X_2 := \{1, 2, 3, 4\}, \quad X_3 := \mathbb{R}.$$

Finden Sie – wenn möglich – für jedes  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  jeweils Abbildungen  $f_1, f_2, f_3, f_4 : X_i \rightarrow X_j$ , so dass

- (a)  $f_1$  weder injektiv, noch surjektiv,
- (b)  $f_2$  injektiv, aber nicht surjektiv,
- (c)  $f_3$  nicht injektiv, aber surjektiv,
- (d)  $f_4$  bijektiv ist.

Zur Erinnerung: Seien  $X, Y$  Mengen. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt

- (a) *injektiv*, falls für alle  $x, y \in X$  gilt:  $f(x) = f(y)$  impliziert  $x = y$ .
- (b) *surjektiv*, falls es zu jedem  $y \in Y$  ein  $x \in X$  gibt mit  $f(x) = y$ .
- (c) *bijektiv*, falls  $f$  injektiv und surjektiv ist.