


Vorlesung zum Brückenkurs am 10.10.2023

Kurvendiskussion - Jetzt geht's rund

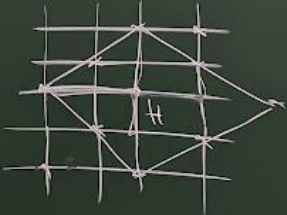


Gesamtheit aller Punkte, die von einem Mittelpunkt alle denselben Abstand haben

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid d(x_1, x_2) = 1\}$$

↗ für die gilt

Andere Kreise : 1. Deutsche Bahn ...
2.)



Abstand → Betrag (Zahl, Vektors) → Norm

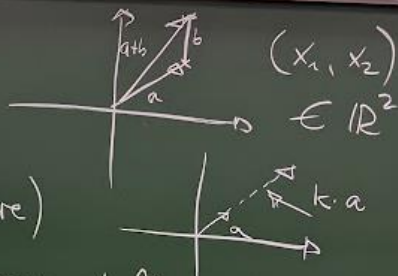
Ist das auch ein Kreis?



Quelle: <https://www.chronotrains.com/de/station/8000323-Saarbrucken-Hbf/2>

Exkurs: Vektorraum

→ ein Vektorraum hat
eine Addition von Vektoren
eine \cdot -Multiplikation (Skalare)



In Vektorräumen können Normen definiert werden
Eine Norm ordnet einem Vektor eine reelle Zahl zu
allgemein: $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$

Für Normen muss folgendes gelten:

$$(N1) \quad \|v\| = 0 \Rightarrow v = 0$$

$$(N2) \quad \|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$$

$$(N3) \quad \|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$$



Beispiele für Normen

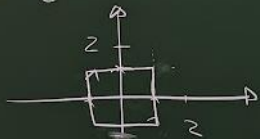
$$1) \quad \|\cdot\|_2 \quad (x_1, x_2) \mapsto \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad \begin{array}{l} \text{euklidische} \\ \text{Norm} \end{array}$$

$$2) \quad \|\cdot\|_1 \quad (x_1, x_2) \mapsto |x_1| + |x_2| \quad \begin{array}{l} \text{Gitternorm} \end{array}$$

$$3) \quad \|\cdot\|_\infty \quad (x_1, x_2) \mapsto \max(|x_1|, |x_2|)$$

Mit Normen lassen sich Einheitskreise definieren

$$E_\infty^2 = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \max(|x_1|, |x_2|) = 1 \}$$



Wann entsteht eine "Ecke"?

$$(x_1=1 \vee x_1=-1) \wedge (x_2=1 \vee x_2=-1) \\ \uparrow \\ \text{oder}$$

es geht noch wilder:

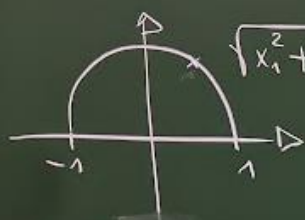
Verallgemeinerung:

$$\text{p-Norm:} \quad \|\cdot\|_p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \quad (x_1, x_2) \mapsto (x_1^p + x_2^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|\cdot\|_\infty \quad \dots \quad (x_1, x_2) \mapsto \lim_{p \rightarrow \infty} (x_1^p + x_2^p)^{\frac{1}{p}}$$

Was ist eine Kurve?

Eine Kurve ist eine zusammenhängende Punktmenge die von einem Weg erzeugt wird

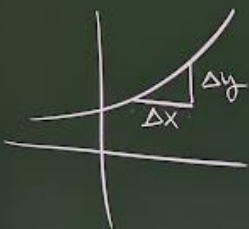


$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 1$$

Stetige Abbildung, z.B. ein Funktionsgraph

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

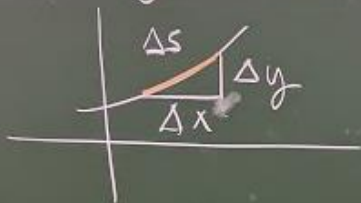
Funktionen: Steigung, Krümmung betrachten auf Grundlage von Werteänderungen



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ Differenzquotient} \rightarrow \frac{dy}{dx} \text{ Differentialquotient}$$

Grenz-
wert

Längenbestimmung von Kurven



$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$$
$$= \Delta x^2 \left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta s^2}{\Delta x^2} = \left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} \right)$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2}$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

Grenzwert

$$s(x) = \int_a^b \frac{ds}{dx} dx = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Konkretes Beispiel



$$f(x) = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

einsetzen:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1}{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \left[\arcsin(x) \right]_{-1}^1$$

$$= \arcsin(1) - \arcsin(-1)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\pi}}$$



So bekommt man das Integral heraus....

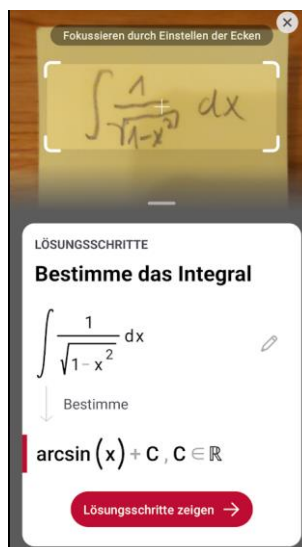
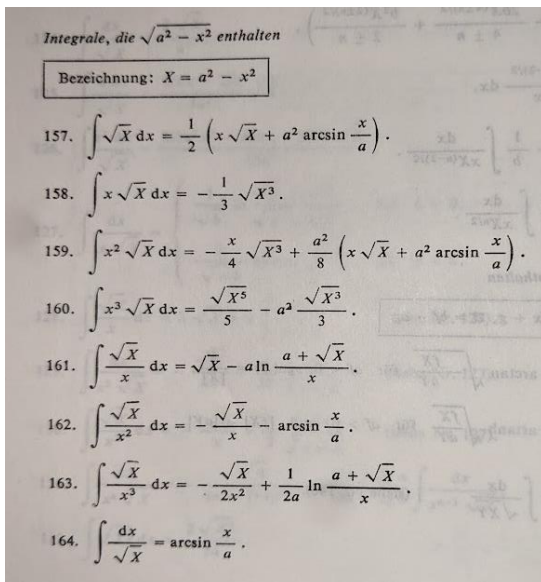
Früher: in Tabellen nachschlagen.

aus Bronstein/Semandjajew,

Taschenbuch der Mathematik

Heute: Wolfram Alpha oder noch einfacher

Photomath 😊



Wieso eigentlich $\arcsin(x)$?

Satz aus der Analysis über die Ableitung der Umkehrfunktion.

Wenn f streng monoton/stetig auf dem Intervall I ,
und f differenzierbar ist in $x \in I$ und $f'(x) \neq 0$
dann ist f^{-1} in $f(x)=y$ differenzierbar

$$\text{Und es gilt: } (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$\Rightarrow \arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(f^{-1}(x))}$$

f^{-1}	\arcsin
f	\sin
f'	$-\cos$

$$= \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin(\arcsin(x)))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$$

Hier der Originalsatz aus Heuser, H. (1994). Lehrbuch der Analysis Teil 1. Stuttgart: Teubner.

47.3 Satz über die Umkehrfunktion f sei streng monoton und stetig auf dem Intervall I , so daß die Umkehrfunktion f^{-1} auf dem Intervall $f(I)$ existiert. Ist in $\xi \in I$ die Ableitung $f'(\xi)$ vorhanden und $\neq 0$, so kann f^{-1} in $\eta := f(\xi)$ differenziert werden, und es gilt

$$(f^{-1})'(\eta) = \frac{1}{f'(\xi)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(\eta))}$$

Der Beweis ist äußerst einfach. Ist (y_n) eine beliebige Folge aus $f(I)$, die gegen η strebt und deren Glieder alle $\neq \eta$ sind, so liegen die $x_n := f^{-1}(y_n)$ alle in I , sind $\neq \xi$, und wegen der Stetigkeit von f^{-1} strebt $x_n \rightarrow f^{-1}(\eta) = \xi$. Also konvergiert

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(\eta)}{y_n - \eta} = \frac{x_n - \xi}{f(x_n) - f(\xi)} = \frac{1}{\frac{f(x_n) - f(\xi)}{x_n - \xi}} \rightarrow \frac{1}{f'(\xi)}$$