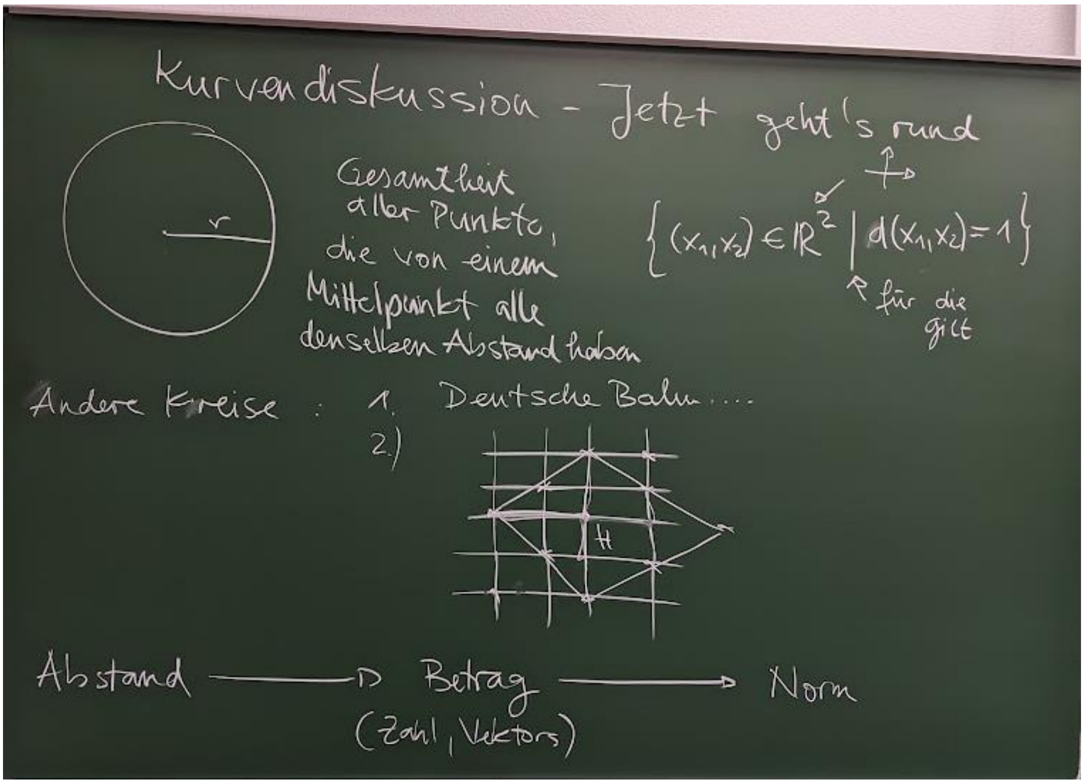
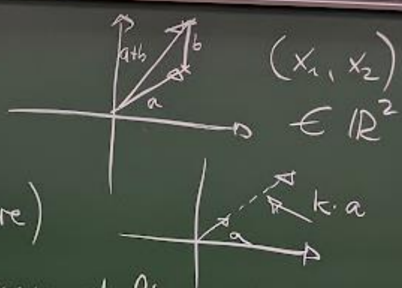
Vorlesung zum Brückenkurs am 10.10.2023



Ist das auch ein Kreis?

Quelle: https://www.chronotrains.com/de/station/8000323-Saarbrucken-Hbf/2

Exkurs: Vektorraum



→ ein Vektorraum hat
eine Addition von Vektoren
eine S-Multiplikation (Skalare)

In Vektorräumen können Normen definiert werden
Eine Norm ordnet einem Vektor eine reelle Zahl zu

allgemein: $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$

Für Normen muss folgendes gelten:

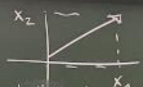
(N1) $\|v\| = 0 \Rightarrow v = 0$

(N2) $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$

(N3) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Beispiele für Normen

1.) $\|\cdot\|_2$ $(x_1, x_2) \longmapsto \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ euklidische Norm

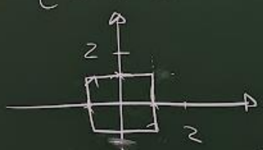


2.) $\|\cdot\|_1$ $(x_1, x_2) \longmapsto |x_1| + |x_2|$ Gitternorm

3.) $\|\cdot\|_\infty$ $(x_1, x_2) \longmapsto \max(|x_1|, |x_2|)$

Mit Normen lassen sich Einheitskreise definieren

$$E_\infty^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \max(|x_1|, |x_2|) = 1\}$$



Wann entsteht eine „Ecke"? $(x_1 = 1 \vee x_1 = -1) \wedge (x_2 = 1 \vee x_2 = -1)$
oder

es geht noch wilder:

Verallgemeinerung:

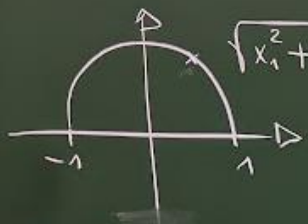
P-Norm: $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_0^+ : (x_1, x_2) \mapsto (x_1^p + x_2^p)^{\frac{1}{p}}$

$\|\cdot\|_\infty$ - - - - - - - $(x_1, x_2) \mapsto \lim_{p \to \infty} (x_1^p + x_2^p)^{\frac{1}{p}}$

Was ist eine Kurve?

Eine Kurve ist eine zusammenhängende Punktmenge die von einem Weg erzeugt wird

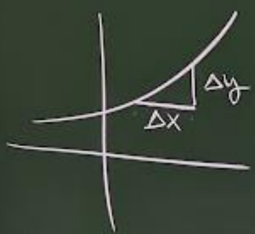
↳ Stetige Abbildung, z.B. ein Funktionsgraph



$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 1$

$$\underset{(y)}{f(x)} = \sqrt{1 - x^2}$$

Funktionen: Steigung, Krümmung betrachten auf Grundlage von Werteänderungen



$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ Differenzenquotient $\xrightarrow[\text{Grenzwert}]{}$ $\frac{dy}{dx}$ Differential-quotient

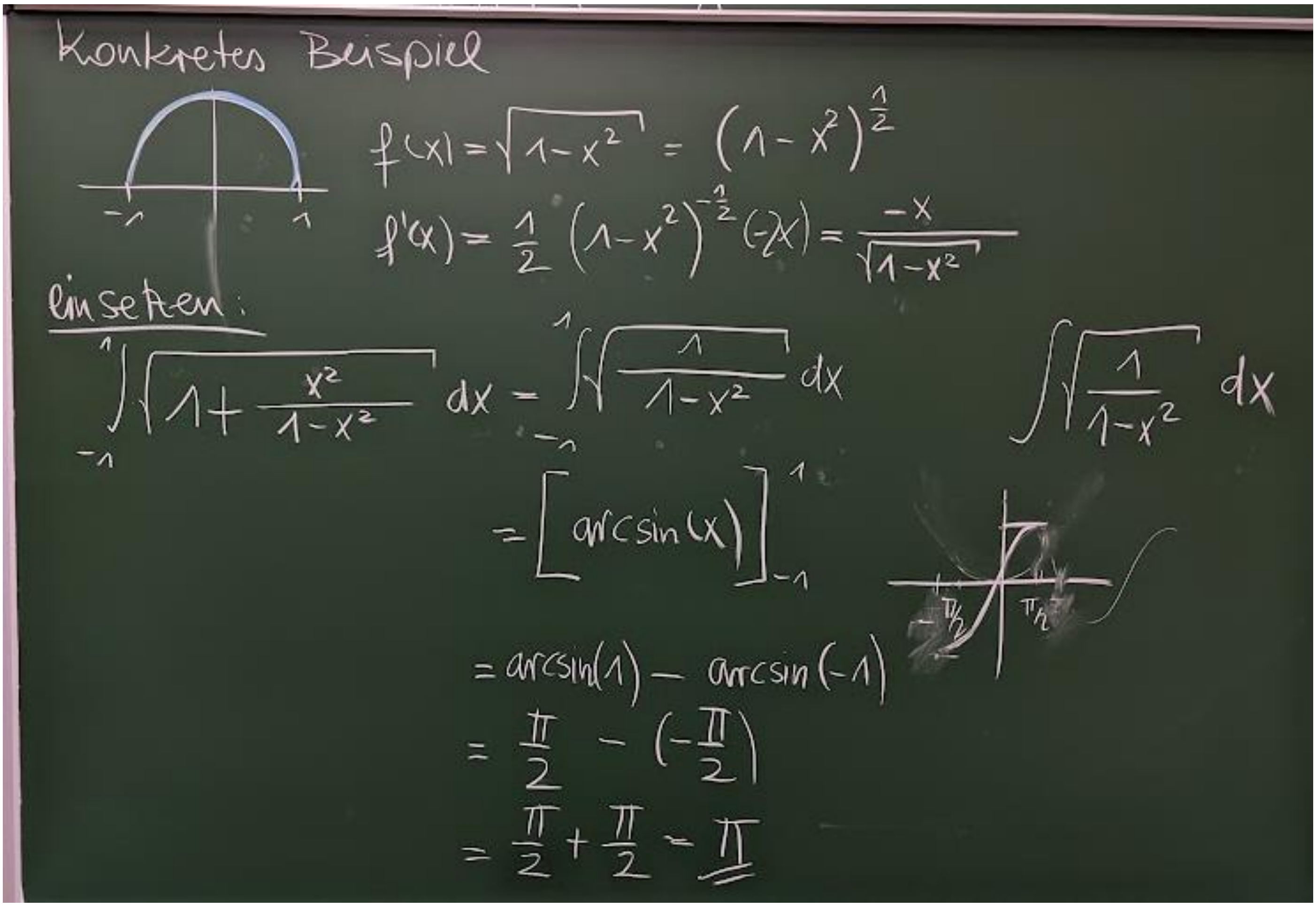
Längenbestimmung von Kurven

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$$
$$= \Delta x^2 \left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{\Delta s^2}{\Delta x^2} = \left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}\right)$$
$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

Grenzwert

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

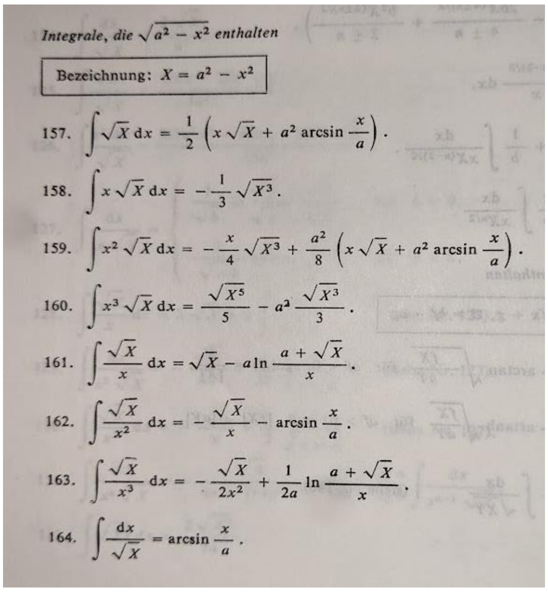
$$s(x) = \int_a^b \frac{ds}{dx}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$



So bekommt man das Integral heraus….

Früher: in Tabellen nachschlagen.
aus Bronstein/Semandjajew,
Taschenbuch der Mathematik

Heute: Wolfram Alpha oder noch einfacher
Photomath 😉



Integrale, die $\sqrt{a^2 - x^2}$ enthalten

Bezeichnung: $X = a^2 - x^2$

157. $\int \sqrt{X}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{X} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}\right)$.

158. $\int x\sqrt{X}\,dx = -\frac{1}{3}\sqrt{X^3}$.

159. $\int x^2\sqrt{X}\,dx = -\frac{x}{4}\sqrt{X^3} + \frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{X} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}\right)$.

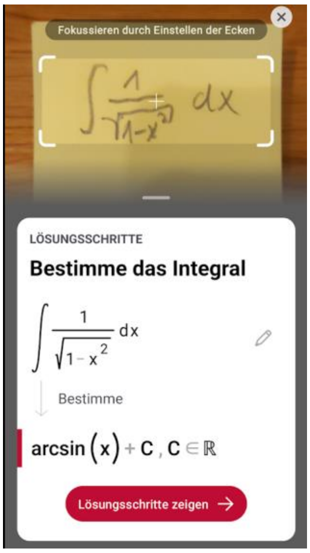
160. $\int x^3\sqrt{X}\,dx = \frac{\sqrt{X^5}}{5} - a^2\frac{\sqrt{X^3}}{3}$.

161. $\int \frac{\sqrt{X}}{x}\,dx = \sqrt{X} - a \ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}$.

162. $\int \frac{\sqrt{X}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{X}}{x} - \arcsin\frac{x}{a}$.

163. $\int \frac{\sqrt{X}}{x^3}\,dx = -\frac{\sqrt{X}}{2x^2} + \frac{1}{2a}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}$.

164. $\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \arcsin\frac{x}{a}$.



Wieso eigentlich $\arcsin(x)$?

Satz aus der Analysis über die Ableitung der Umkehrfunktion.

„Wenn f streng monoton/stetig auf dem Intervall I, und f differenzierbar ist in $x \in I$ und $f'(x) \neq 0$ dann ist f^{-1} in $f(x) = y$ differenzierbar"

Und es gilt: $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$

f^{-1} arcsin
f sin
f' cos

$$\Rightarrow \arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin(x)))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$

Hier der Originalsatz aus **Heuser, H. (1994). Lehrbuch der Analysis Teil 1.Stuttgart: Teubner.**

47.3 Satz über die Umkehrfunktion *f sei streng monoton und stetig auf dem Intervall I, so daß die Umkehrfunktion f^{-1} auf dem Intervall $f(I)$ existiert. Ist in $\xi \in I$ die Ableitung $f'(\xi)$ vorhanden und $\neq 0$, so kann f^{-1} in $\eta := f(\xi)$ differenziert werden, und es gilt*

$$(f^{-1})'(\eta) = \frac{1}{f'(\xi)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(\eta))}.$$

Der Beweis ist äußerst einfach. Ist (y_n) eine beliebige Folge aus $f(I)$, die gegen η strebt und deren Glieder alle $\neq \eta$ sind, so liegen die $x_n := f^{-1}(y_n)$ alle in I, sind $\neq \xi$, und wegen der Stetigkeit von f^{-1} strebt $x_n \to f^{-1}(\eta) = \xi$. Also konvergiert

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(\eta)}{y_n - \eta} = \frac{x_n - \xi}{f(x_n) - f(\xi)} = \frac{1}{\dfrac{f(x_n) - f(\xi)}{x_n - \xi}} \to \frac{1}{f'(\xi)}. \qquad \blacksquare$$