Übungsblatt 1 **Zuverlässigkeit I**

Aufgabe 1.1

Durch welche Aspekte ist der technische Begriff der Zuverlässigkeit definiert?

a) Beschaffenheit ☐
b) Arbeitsbedingungen ■
c) Arbeitsfähigkeit ☐
d) Zeitraum ■
e) Zeitpunkt ☐
f) Gebrauchstauglichkeit ☐
g) Funktion ■
h) Nutzerfreundlichkeit ☐
i) Ästhetik ☐
j) Erfordernisse ☐

Erläuterung:
Zuverlässigkeit ist die Fähigkeit eines technischen Objektes, eine erwünschte Funktion fehlerfrei unter definierten Bedingungen über einen festgelegten Zeitraum zu erbringen. Mathematisch lässt sie sich durch „1 – Ausfallwahrscheinlichkeit“ beschreiben.

Aufgabe 1.2

Durch welche Aspekte ist der technische Begriff der Qualität definiert?

a) Beschaffenheit ■
b) Arbeitsbedingungen ☐
c) Arbeitsfähigkeit ☐
d) Zeitraum ☐
e) Zeitpunkt ☐
f) Gebrauchstauglichkeit ☐
g) Funktion ☐
h) Nutzerfreundlichkeit ☐
i) Ästhetik ☐
j) Erfordernisse ■

Erläuterung:
Qualität (DIN 55350) ist die Beschaffenheit eines technischen Erzeugnisses bezüglich seiner Eignung, festgelegte und vorausgesetzte Erfordernisse (Qualitätsanforderung) zu erfüllen.

Aufgabe 1.3

Durch welche Aspekte ist der technische Begriff der Verfügbarkeit definiert?

a) Beschaffenheit ☐
b) Arbeitsbedingungen ☐
c) Arbeitsfähigkeit ■
d) Zeitraum ☐
e) Zeitpunkt ■
f) Gebrauchstauglichkeit ☐
g) Funktion ☐
h) Nutzerfreundlichkeit ☐
i) Ästhetik ☐
j) Erfordernisse ☐

Erläuterung:
Verfügbarkeit ist die Wahrscheinlichkeit für die Arbeitsfähigkeit eines technischen Objektes zu einem beliebigen Zeitpunkt im Betrieb. Es gilt:

$$V = \frac{MTTF}{MTTF + MTTR}$$

MTTF: Mean Time To Failure
MTTR: Mean Time To Repair

Aufgabe 1.4

In welchem Zusammenhang stehen die Begriffe Qualität, Zuverlässigkeit und Verfügbarkeit?

a) Es sind gleichberechtigte Begriffe. ☐

b) Zuverlässigkeit ist der Oberbegriff. ☐

c) Qualität ist der Oberbegriff. ■

d) Verfügbarkeit ist der Oberbegriff. ☐

e) Zuverlässigkeit hängt von Qualität ab. ☐

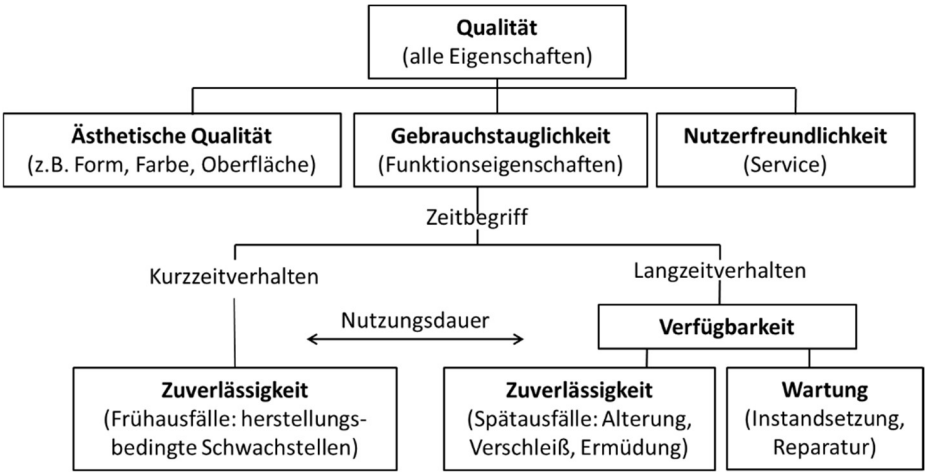
f) Verfügbarkeit hängt von Zuverlässigkeit ab. ■

g) Qualität hängt von Verfügbarkeit ab. ■

h) Qualität hängt von Zuverlässigkeit ab. ■

Erläuterung:

Der Zusammenhang zwischen den Begriffen lässt sich aus folgender Darstellung ableiten:



Aufgabe 1.5

Mit welcher Kurve wird im Allgemeinen die Zuverlässigkeit eines Produktes beschrieben?

a) Zuverlässigkeitskurve ☐

b) Robustheitskurve ☐

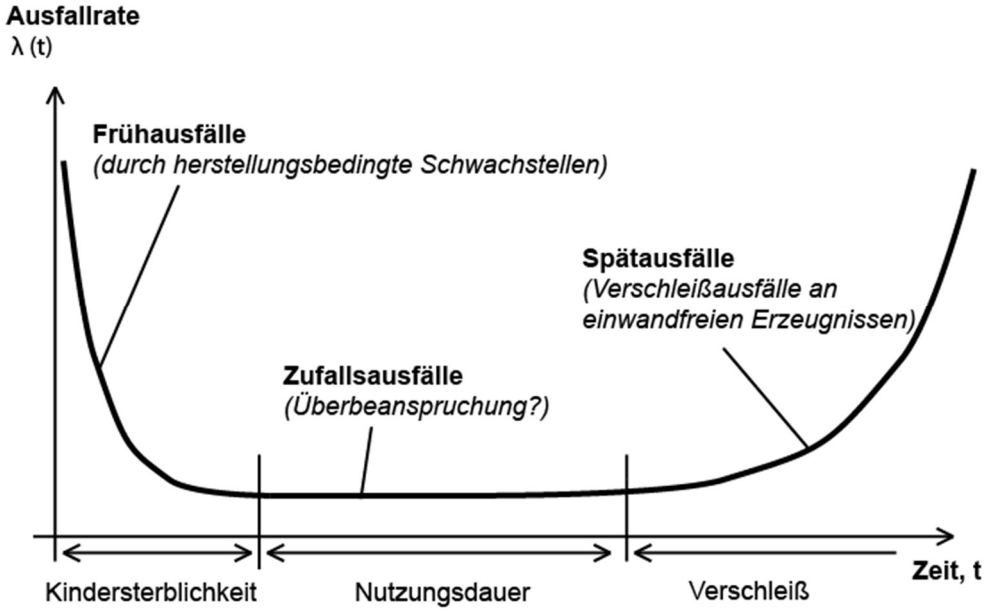
c) Badewannenkurve ■

d) Beanspruchungskurve ☐

e) Qualitätskurve ☐

Erläuterung:

Die Zuverlässigkeit eines Produktes lässt sich im Allgemeinen mit der Badewannenkurve beschreiben:



Aufgabe 1.6

Nennen Sie Gründe für das Zustandekommen von Ausfällen!

a) Mangelnde Qualität ☐

b) Extreme Umweltbedingungen ☐

c) Nicht erfasste Herstellungsfehler ■

d) Zu geringe Robustheit ■

e) Spezifische Umweltbelastungen (z.B. Feuchte) ■

f) Veränderter Werkstoffeinsatz ☐

Erläuterung:

- In Entwicklung und Fertigung, z.B. durch nicht erfasste Herstellungsfehler oder falsche Werkstoffauswahl.
- Durch Wirkung von Umweltbelastungen, z.B. Korrosion, Kontamination, Kriechen, Feuchte, Elektromigration, Temperatur, elektrischer Durchschlag.

Aufgabe 1.7

In welche verschiedenen Kategorien lassen sich Ausfallmechanismen einteilen?

a) Überbeanspruchung, Qualität, Instantanschädigung und Zuverlässigkeit ☐

b) Verfügbarkeit, Verschleiß, Qualität und Alterung ☐

c) Zuverlässigkeit, Verschleiß, Instantanschädigung und Verfügbarkeit ☐

d) Überbeanspruchung, Verschleiß, Instantanschädigung und Alterung ■

e) Überbeanspruchung, Qualität, Zuverlässigkeit und Alterung ☐

Erläuterung:

Ausfallmechanismen lassen sich in folgende Kategorien einteilen:

i) Überbeanspruchung, z.B.:
   - Festigkeitsüberschreitung
   - Sprödbruch infolge von Lunkern oder Einschlüssen

ii) Verschleiß

iii) Instantanschädigung

iv) Alterung, z.B.:
   - Temperatur (Diffusion)
   - Feuchte (Hydrolyse, Korrosion)

Aufgabe 1.8

Was sind Beispiele für Ausfälle durch Verschleiß?

a) Alterung durch Temperatureinwirkung ☐

b) Ermüdung durch unterkritische Wechselbelastungen ■

c) Schäden durch Drop-Schock-Belastungen ☐

d) Korrosion durch Feuchteeinwirkung ☐

e) Kriechen durch Dauerlast ■

f) Schädigung durch Biegebeanspruchungen ☐

g) Gewaltbrüche infolge von Lunkern im Werkstoff ☐

h) Festigkeitsüberschreitung aufgrund von Materialfehlern ☐

Erläuterung:
Ausfallmechanismen lassen sich in folgende Kategorien einteilen:

i) Überbeanspruchung, z.B.:
   - Festigkeitsüberschreitung
   - Sprödbruch infolge von Lunkern oder Einschlüssen

ii) Verschleiß, z.B.:
   - Ermüdung (unterkritische Beanspruchung, regelmäßig wechselnd)
   - Kriechen (unterkritische Beanspruchung über langen Zeitraum)

iii) Instantanschädigung, z.B.:

iv) Alterung, z.B.:
   - Temperatur (Diffusion)
   - Feuchte (Hydrolyse, Korrosion)

Aufgabe 1.9

Was sind Beispiele für Ausfälle durch Instantanschädigung?

a) Alterung durch Temperatureinwirkung ☐

b) Ermüdung durch unterkritische Wechselbelastungen ☐

c) Schäden durch Drop-Schock-Belastungen ■

d) Korrosion durch Feuchteeinwirkung ☐

e) Kriechen durch Dauerlast ☐

f) Schädigung durch Biegebeanspruchungen ■

g) Gewaltbrüche infolge von Lunkern im Werkstoff ☐

h) Festigkeitsüberschreitung aufgrund von Materialfehlern ☐

Erläuterung:
Ausfallmechanismen lassen sich in folgende Kategorien einteilen:

i) Überbeanspruchung, z.B.:
   - Festigkeitsüberschreitung
   - Sprödbruch infolge von Lunkern oder Einschlüssen

ii) Verschleiß, z.B.:
   - Ermüdung (unterkritische Beanspruchung, regelmäßig wechselnd)
   - Kriechen (unterkritische Beanspruchung über langen Zeitraum)

iii) Instantanschädigung, z.B.:
   - Schock
   - Biegung

iv) Alterung, z.B.:
   - Temperatur (Diffusion)
   - Feuchte (Hydrolyse, Korrosion)

Aufgabe 1.10

Eine Statistik bei einer Photovoltaikinstallation hat folgende Ergebnisse gezeigt:
45 % der Module bestehen aus monokristallinen Zellen. Die restlichen sind multikristallin.
3 % der monokristallinen Module und 15 % der multikristallinen Module sind aus Japan.
20 % der monokristallinen Module und 30 % der multikristallinen Module sind aus Deutschland.
Der jeweilige Rest kommt aus China.

a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Modul aus monokristallinen Zellen besteht und aus Japan stammt?
b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Modul aus Japan stammt?
c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Modul aus monokristallinen Zellen besteht, wenn es aus Japan stammt?
d) Besteht eine Abhängigkeit zwischen Zelltypen und Produktionsland?

Lösung:

Gegeben sind folgende Ereignisse:

- M: Das Modul besteht aus multikristallinen Zellen. $P(M) = 0{,}55$
- N: Das Modul besteht aus monokristallinen Zellen. $P(N) = 0{,}45$
- J: Das Modul stammt aus Japan.
- $J|M$: Das Modul stammt aus Japan, wenn es aus multikristallinen Zellen besteht. $P(J|M) = 0{,}15$
- $J|N$: Das Modul stammt aus Japan, wenn es aus monokristallinen Zellen besteht. $P(J|N) = 0{,}03$

a) Für die bedingte Wahrscheinlichkeit gilt allgemein (vgl. [1], S. 185):

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A|B) \bullet P(B)$$

Damit gilt für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Modul aus monokristallinen Zellen besteht und aus Japan stimmt:

$$P(J \cap N) = P(J|N) \bullet P(N) = 0{,}03 \bullet 0{,}45 = 0{,}0135$$

b) Für die totale Wahrscheinlichkeit gilt allgemein (vgl. [1], S. 186):

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \bullet P(B|A_i)$$

Damit gilt für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Modul aus Japan stammt:

$$P(J) = P(N) \bullet P(J|N) + P(M) \bullet P(J|M) = P(J \cap N) + P(M) \bullet P(J|M)$$
$$= 0{,}0135 + 0{,}55 \bullet 0{,}15 = 0{,}0135 + 0{,}0825 = 0{,}096$$

c) Für die bedingte Wahrscheinlichkeit gilt allgemein (vgl. [1], S. 185):

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Damit gilt für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Modul aus monokristallinen Zellen besteht, wenn es aus Japan stammt:

$$P(N|J) = \frac{P(N \cap J)}{P(J)} = \frac{P(J \cap N)}{P(J)} = \frac{0{,}0135}{0{,}096} \approx 0{,}14$$

d) Um zu überprüfen, ob zwischen dem Zelltyp und dem Produktionsland eine Abhängigkeit besteht, muss auf stochastische Unabhängigkeit der Ereignisse geprüft werden. Zwei Ereignisse A und B heißen unabhängig, wenn gilt (vgl. [1], S. 186):

$$P(A \cap B) = P(A) \bullet P(B)$$

Für monokristalline Zellen:

$$P(N) \bullet P(J) = 0{,}45 \bullet 0{,}096 = 0{,}0432 \neq 0{,}0135 = P(J \cap N)$$

Folglich besteht eine Abhängigkeit zwischen Zelltyp und Produktionsland.

Aufgabe 1.11

Ein Unternehmen lässt seine Notebooks an drei unterschiedlichen Standorten produzieren.
40 % der Produktion läuft an Standort A mit 4 % defekten Teilen.
25 % der Produktion läuft an Standort B mit 2 % defekten Teilen.
35 % der Produktion läuft an Standort C mit 1 % defekten Teilen.
a) Wie groß ist der Gesamtanteil an defekten Notebooks?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein defektes Notebook aus Standort A stammt?

Lösung:

Gegeben sind folgende Ereignisse:

- A: Notebook stammt aus Standort A. $P(A) = 0{,}4$
- B: Notebook stammt aus Standort B. $P(B) = 0{,}25$
- C: Notebook stammt aus Standort C. $P(C) = 0{,}35$
- D: Notebook ist defekt, wenn es aus Standort …
    - … A kommt. $P(D|A) = 0{,}04$
    - … B kommt. $P(D|B) = 0{,}02$
    - … C kommt. $P(D|C) = 0{,}01$

a) Für die totale Wahrscheinlichkeit gilt allgemein (vgl. [1], S. 185):

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \bullet P(B|A_i)$$

Damit gilt für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Notebook defekt ist:

$$P(D) = P(A) \bullet P(D|A) + P(B) \bullet P(D|B) + P(C) \bullet P(D|C)$$
$$= 0{,}4 \bullet 0{,}04 + 0{,}25 \bullet 0{,}02 + 0{,}35 \bullet 0{,}01 = 0{,}0245$$

b) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(A|D)$ dafür, dass ein Notebook aus Standort A stammt, wenn es defekt ist. Dafür muss der Satz von Bayes genutzt werden (vgl. [1], S. 186):

$$P(A|B) = \frac{P(A) \bullet P(B|A)}{P(B)}$$

Im vorliegenden Fall also:

$$P(A|D) = \frac{P(A) \bullet P(D|A)}{P(D)} = \frac{0{,}4 \bullet 0{,}04}{0{,}0245} = \frac{0{,}016}{0{,}0245} \approx 0{,}6531$$

Aufgabe 1.12

Nach der Bestückung einer Platine werden folgende Fehler überprüft.
E1: Mindestens ein Bauteil fehlt.
E2: Mindestens ein Bauteil ist nicht funktionsfähig.
Es ist bekannt, dass 2 % der Platinen mindestens einen der beiden Fehler beinhalten.
Für den Fall, dass einer der beiden Fehler auftritt, wird die Platine als nicht funktionsfähig eingestuft.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein ausgewähltes Produkt funktionsfähig ist?

Lösung:

Gegeben sind folgende Ereignisse:

- $E1$: Mindestens ein Bauteil fehlt.
- $E2$: Mindestens ein Bauteil ist nicht funktionsfähig.
- $D = E1 \cup E2$: Die ausgewählte Platine ist defekt, wenn mindestens einer der beiden Fehler auftritt. $P(D) = P(E1 \cup E2) = 0{,}02$

Wenn die ausgewählte Platine funktionsfähig ist, bedeutet das, dass keiner der beiden Fehler vorliegt:

$$F = \overline{E1} \cap \overline{E2}$$

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine ausgewählte Platine funktionsfähig ist. Für diese gilt:

$$P(F) = P(\overline{E1} \cap \overline{E2}) = 1 - P\left(\overline{\overline{E1} \cap \overline{E2}}\right)$$

Um den letzten Term umzuformen, muss das Gesetz von de Morgan benutzt werden (vgl. [1], S. 184):

$$\overline{\bigcap_n A_n} = \bigcup_n \bar{A}_n$$

Daraus folgt:

$$P(F) = 1 - P\left(\overline{\overline{E1} \cap \overline{E2}}\right) = 1 - P(E1 \cup E2) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$$

Aufgabe 1.13

Gegeben ist ein Dreikomponentensystem L1, L2 und L3, die unabhängig voneinander arbeiten.
Aus der Erfahrung sind die Wahrscheinlichkeiten $\mathrm{P(L1)} = 0{,}9$, $\mathrm{P(L2)} = 0{,}8$ und $\mathrm{P(L3)} = 0{,}7$ für fehlerfreies Arbeiten der Komponenten L1, L2 und L3 bekannt.
Das System fällt aus, wenn L1 und L3 oder L2 und L3 oder alle 3 Komponenten ausfallen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das System ausfallfrei funktioniert!

Lösung:

Gegeben sind folgende Ereignisse:

- $L1$: Komponente L1 arbeitet fehlerfrei. $P(L1) = 0{,}9$
- $L2$: Komponente L2 arbeitet fehlerfrei. $P(L2) = 0{,}8$
- $L3$: Komponente L3 arbeitet fehlerfrei. $P(L3) = 0{,}7$
- F: Das System fällt aus. $F = (\overline{L1} \cap L2 \cap \overline{L3}) \cup (L1 \cap \overline{L2} \cap \overline{L3}) \cup (\overline{L1} \cap \overline{L2} \cap \overline{L3})$

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das System ausfallfrei funktioniert. Dies lässt sich über die Gegenwahrscheinlichkeit zu Ereignis F berechnen (vgl. [1], S. 185):

$$P(\bar{F}) = 1 - P(F)$$

Für die Wahrscheinlichkeit $P(F)$ eines Systemausfalls gilt:

$$P(F) = P((\overline{L1} \cap L2 \cap \overline{L3}) \cup (L1 \cap \overline{L2} \cap \overline{L3}) \cup (\overline{L1} \cap \overline{L2} \cap \overline{L3}))$$

Für die Vereinigung disjunkter Mengen ($A \cap B = \emptyset$) gilt allgemein (vgl. [1], S. 185):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cup B \cup C) = P\big(A \cup (B \cup C)\big) = P(A) + P(B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

Damit:

$$\begin{aligned} P(F) &= P\big((\overline{L1} \cap L2 \cap \overline{L3}) \cup (L1 \cap \overline{L2} \cap \overline{L3}) \cup (\overline{L1} \cap \overline{L2} \cap \overline{L3})\big) \\ &= P(\overline{L1} \cap L2 \cap \overline{L3}) + P(L1 \cap \overline{L2} \cap \overline{L3}) + P(\overline{L1} \cap \overline{L2} \cap \overline{L3}) \end{aligned}$$

Für unabhängige Ereignisse gilt allgemein (vgl. [1], S. 186):

$$P(A \cap B) = P(A) \bullet P(B)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P\big(A \cap (B \cap C)\big) = P(A) \bullet P(B \cap C) = P(A) \bullet P(B) \bullet P(C)$$

Damit:

$$P(F) = P(\overline{L1} \cap L2 \cap \overline{L3}) + P(L1 \cap \overline{L2} \cap \overline{L3}) + P(\overline{L1} \cap \overline{L2} \cap \overline{L3})$$
$$= P(\overline{L1}) \bullet P(L2) \bullet P(\overline{L3}) + P(L1) \bullet P(\overline{L2}) \bullet P(\overline{L3}) + P(\overline{L1}) \bullet P(\overline{L2}) \bullet P(\overline{L3})$$

Für die einzelnen Wahrscheinlichkeiten gilt (vgl. [1], S. 185):

$$P(L1) = 0{,}9 \rightarrow P(\overline{L1}) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$$
$$P(L2) = 0{,}8 \rightarrow P(\overline{L2}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$$
$$P(L3) = 0{,}7 \rightarrow P(\overline{L3}) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$$

Damit:

$$P(F) = P(\overline{L1}) \bullet P(L2) \bullet P(\overline{L3}) + P(L1) \bullet P(\overline{L2}) \bullet P(\overline{L3}) + P(\overline{L1}) \bullet P(\overline{L2}) \bullet P(\overline{L3})$$
$$= 0{,}1 \bullet 0{,}8 \bullet 0{,}3 + 0{,}9 \bullet 0{,}2 \bullet 0{,}3 + 0{,}1 \bullet 0{,}2 \bullet 0{,}3 = 0{,}024 + 0{,}054 + 0{,}006 = 0{,}084$$

Dann folgt für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$P(\bar{F}) = 1 - P(F) = 1 - 0{,}084 = 0{,}916$$

Referenzen:

[1] *Luderer, B.; Nollau, V.; Vetters, K.:* Mathematische Formeln für Wirtschaftswissenschaftler, 8. Auflage, Wiesbaden: Springer Gabler 2015.