Übungsblatt 2 **Zuverlässigkeit I**

Aufgabe 2.1

Welche Ziele verfolgt das Produktdesign im Rahmen der Zuverlässigkeit?

a) Lebensdauermaximierung ☐

b) Absicherung der Robustheit ■

c) Verkürzung von Entwicklungszeiten ☐

d) Analyse von Verschleißmechanismen ■

e) Verbesserung der Nutzerfreundlichkeit ☐

f) Erhöhung der Fertigungsqualität ☐

g) Verminderung von Frühausfällen ■

h) Vermeidung von Zufallsausfällen ☐

Erläuterung:
Das Produktdesign verfolgt im Rahmen der Zuverlässigkeit die drei folgenden Ziele:

- Die Robustheit muss über den erwarteten Beanspruchungen im Betrieb liegen.
- Die Wirkung von Verschleißmechanismen soll erst nach Ablauf der geplanten Nutzungsdauer eintreten.
- Die Anzahl der Frühausfälle soll minimiert werden (durch eine erhöhte Prozessstabilität oder geeignete Technologieauswahl).

Aufgabe 2.2

Welche der folgenden Belastungen von elektronischen Baugruppen wirkt besonders langsam?

a) Schock ☐

b) Vibration ☐

c) Biegung ☐

d) Thermische Wechsel ■

Erläuterung:
Die mechanischen Belastungen (Schock, Vibration und Biegung) wirken quasi direkt nach ihrem Auftreten, wohingegen die thermischen Wechsel länger andauern.

Aufgabe 2.3

Welche der folgenden Belastungen von elektronischen Baugruppen tritt am häufigsten auf?

a) Schock ☐

b) Vibration ☐

c) Biegung ☐

d) Thermische Wechsel ■

Erläuterung:
Die thermischen Wechsel treten während einer Produktlebensdauer am häufigsten auf (lastabhängige Erwärmung und Abkühlung bei Benutzung, Temperaturunterschiede innerhalb/außerhalb von Gebäuden bei tragbaren Geräten, usw.).

Aufgabe 2.4

Welche der folgenden Belastungen von elektronischen Baugruppen hat die höchste Intensität der Schädigungswirkung?

a) Schock ■

b) Vibration ☐

c) Biegung ☐

d) Thermische Wechsel ☐

Erläuterung:
Durch die hohe G-Last hat die Schock-Belastung die höchste Intensität der Schädigungswirkung.

Aufgabe 2.5

Welche Besonderheiten treten bei stark miniaturisierten Bauteilen der Mikroelektronik bzw. Mikrosystemtechnik in Bezug zur Zuverlässigkeit auf?

a) Kleine Abmessungen ☐

b) Große Materialvielfalt auf kleinem Raum ■

c) Kleines Verhältnis von Oberfläche zu Volumen ☐

d) Kurze Diffusionswege ■

e) Kleine Korngrößen ■

f) Höhere Diffusionsgeschwindigkeit ☐

g) Geringe Materialvorkommen ■

h) Es gibt nur einkristalline Werkstoffstrukturen ☐

i) Größere Anzahl von signifikanten Materialfehlern ☐

Erläuterung:
Probleme bei stark miniaturisierten Bauteilen mit ihren Folgen sind:

- Große Materialvielfalt auf kleinen Abmessungen (Interdiffusionsprozesse, Phasenumwandlungen)
- Kurze Diffusionswege (Feuchte, Korrosion, Migration)
- Kleine Korngrößen (Festigkeit, Superplastizität)
- Geringe Materialvorkommen (Korrosion, Auflösung)
- Einkristalline Werkstoffstrukturen (spröde, hochfeste Strukturen; es gibt aber auch multikristalline Werkstoffstrukturen!)

Aufgabe 2.6
Nach statistischen Angaben in einem Produktionswerk entfallen von 40 Stillständen der Produktion 15 auf Störungen bei der Schweißanlage, 6 auf technische Probleme am Fließband und 4 auf die nicht rechtzeitige Lieferung der Werkstücke. Die übrigen Stillstände haben andere Ursachen. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für den Ausfall der Produktion aufgrund anderer Ursachen!

Lösung:
Gegeben sind folgende Ereignisse:

- Anzahl Stillstände: 40
- S: Stillstände durch Störungen bei der Schweißanlage: 15.
- F: Stillstände durch technische Probleme am Fließband: 6.
- L: Stillstände durch nicht rechtzeitige Lieferung der Werkstücke: 4.
- U: Stillstände durch andere Ursachen.

Für die jeweilige Wahrscheinlichkeit („klassische Wahrscheinlichkeit“) gilt allgemein (vgl. [1], S. 184):

$$P(A) = \frac{Anzahl\ der\ f\ddot{u}r\ A\ g\ddot{u}nstigen\ F\ddot{a}lle}{Anzahl\ aller\ m\ddot{o}glichen\ F\ddot{a}lle}$$

Damit gilt:

$$P(S) = \frac{15}{40} \qquad P(F) = \frac{6}{40} \qquad P(L) = \frac{4}{40}$$

Die Wahrscheinlichkeit für den Ausfall der Produktion aufgrund anderer Ursachen beträgt:

$$P(S) + P(F) + P(L) + P(U) = 1$$

$$\Leftrightarrow P(U) = 1 - P(S) - P(F) - P(L) = 1 - \frac{15}{40} - \frac{6}{40} - \frac{4}{40} = \frac{15}{40} = 0{,}375$$

Aufgabe 2.7

An einer Baustelle befinden sich 4 unabhängig voneinander arbeitende Kräne K1, K2, K3 und K4, die mit den Wahrscheinlichkeiten 0,1; 0,15; 0,3 und 0,25 in einem bestimmten Moment ausfallen. Gesucht sind die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass in einem bestimmten Moment

a) wenigstens ein Kran arbeitet.
b) genau ein Kran arbeitet.
c) alle vier Kräne arbeiten.

Lösung:

Gegeben sind folgende Ereignisse:

- A: Kran 1 fällt in einem bestimmten Moment aus. $P(A) = 0{,}1$
- B: Kran 2 fällt in einem bestimmten Moment aus. $P(B) = 0{,}15$
- C: Kran 3 fällt in einem bestimmten Moment aus. $P(C) = 0{,}3$
- D: Kran 4 fällt in einem bestimmten Moment aus. $P(D) = 0{,}25$

Laut Aufgabenstellung arbeiten die Kräne unabhängig voneinander. Also ist stochastische Unabhängigkeit anzunehmen, für welche gilt (vgl. [1], S. 186):

$$P(A \cap B) = P(A) \bullet P(B)$$

$$P(A \cap B \cap C \cap D) = P(A) \bullet P(B) \bullet P(C) \bullet P(D)$$

Für die Gegenwahrscheinlichkeit gilt (vgl. [1], S. 186):

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Damit lassen sich die gefragten Wahrscheinlichkeiten wie folgt berechnen:

a) $P(wenigstens\ ein\ Kran\ arbeitet) = 1 - P(kein\ Kran\ arbeitet)$
$= 1 - P(A \cap B \cap C \cap D) = 1 - P(A) \bullet P(B) \bullet P(C) \bullet P(D)$
$= 1 - 0{,}1 \bullet 0{,}15 \bullet 0{,}3 \bullet 0{,}25 = 1 - 0{,}001125 \approx 0{,}9989$

b) $P(genau\ ein\ Kran\ arbeitet)$
$= P(\bar{A} \cap B \cap C \cap D) + P(A \cap \bar{B} \cap C \cap D) + P(A \cap B \cap \bar{C} \cap D) + P(A \cap B \cap C \cap \bar{D})$
$= P(\bar{A}) \bullet P(B) \bullet P(C) \bullet P(D) + P(A) \bullet P(\bar{B}) \bullet P(C) \bullet P(D)$
$+P(A) \bullet P(B) \bullet P(\bar{C}) \bullet P(D) + P(A) \bullet P(B) \bullet P(C) \bullet P(\bar{D})$
$= (1 - 0{,}1) \bullet 0{,}15 \bullet 0{,}3 \bullet 0{,}25 + 0{,}1 \bullet (1 - 0{,}15) \bullet 0{,}3 \bullet 0{,}25$
$+0{,}1 \bullet 0{,}15 \bullet (1 - 0{,}3) \bullet 0{,}25 + 0{,}1 \bullet 0{,}15 \bullet 0{,}3 \bullet (1 - 0{,}25)$
$= 0{,}010125 + 0{,}006375 + 0{,}002625 + 0{,}003375 = 0{,}0225$

c) $P(alle\ Kräne\ arbeiten) = P(A \cap B \cap C \cap D) = P(\bar{A}) \bullet P(\bar{B}) \bullet P(\bar{C}) \bullet P(\bar{D})$
$= (1 - 0{,}1) \bullet (1 - 0{,}15) \bullet (1 - 0{,}3) \bullet (1 - 0{,}25) = 0{,}9 \bullet 0{,}85 \bullet 0{,}7 \bullet 0{,}75$
$\approx 0{,}4016$

Aufgabe 2.8

In einem Produktionswerk stehen ein Schweißroboter, 4 Montagemaschinen und 2 Lackieranlagen. Ist der Schweißroboter arbeitsfähig, dann liegt das Ereignis A vor. B_k $(k = 1, \dots, 4)$ bzw. C_i $(i = 1{,}2)$ seien die Ereignisse, dass die k-te Montagemaschine bzw. die i-te Lackieranlage arbeitsfähig sind. Die Produktionsfähigkeit im Werk (Ereignis D) ist gewährleistet, wenn der Schweißroboter, mindestens eine Montagemaschine und mindestens eine Lackieranlage arbeitsfähig sind. Drücken Sie die Ereignisse D und $\bar{D}$ durch die Ereignisse A, B_k und C_i aus!

Lösung:

Gegeben sind folgende Ereignisse:

- A: Der Schweißroboter ist arbeitsfähig.
- B_k: Die k-te Montagemaschine ist arbeitsfähig.
- C_i: Die i-te Lackieranlage ist arbeitsfähig.
- D: Die Produktionsfähigkeit im Werk ist gewährleistet.

Laut der Aufgabenstellung ist die Produktionsfähigkeit im Werk gewährleistet, wenn der Schweißroboter, mindestens eine Montagemaschine und mindestens eine Lackieranlage arbeitsfähig sind. In Ereignissen ausgedrückt bedeutet dies:

$$D = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4) \cap (C_1 \cup C_2)$$

Um das Gegenereignis $\overline{D}$ auszudrücken, werden die Regeln von De Morgan gebraucht (vgl. [1], S. 184):

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \qquad \text{allgemein: } \overline{\cap_n A_n} = \cup_n \overline{A_n}$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \qquad \text{allgemein: } \overline{\cup_n A_n} = \cap_n \overline{A_n}$$

Damit lässt sich das Gegenereignis $\overline{D}$ wie folgt ausdrücken:

$$\overline{D} = \overline{A \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4) \cap (C_1 \cup C_2)} = \bar{A} \cup \overline{B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4} \cup \overline{C_1 \cup C_2}$$

$$= \bar{A} \cup (\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap \overline{B_4}) \cup (\overline{C_1} \cap \overline{C_2})$$

Aufgabe 2.9

In einem Produktionslos befinden sich 40 Teile. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teil nachgearbeitet werden muss, beträgt 0,3. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass in einem Los

a) genau 20 Teile sind, die nicht nachgearbeitet werden müssen.
b) wenigstens 30 Teile sind, die nicht nachgearbeitet werden müssen.
c) höchstens 25 Teile sind, die nicht nachgearbeitet werden müssen.
d) Außerdem ist die mittlere Anzahl der Teile zu berechnen, die nicht nachgearbeitet werden muss.

Gehen Sie von einer Binomialverteilung aus!

Lösung:

Bei dieser Aufgabe handelt es sich um eine Binomialverteilung. Für diese gilt (vgl. [1], S. 188):

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \bullet p^k \bullet (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \bullet p^k \bullet q^{n-k}$$

Dabei ist:

- k: Zufällige Anzahl der Treffer an Teilen, die nicht nachgearbeitet werden müssen.
- $n = 40$: Gesamtzahl an Teilen.
- $q = 0{,}3$: Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Teil nachgearbeitet werden muss.
- $p = 1 - q = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$: Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Teil nicht nachgearbeitet werden muss.
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \bullet (n-k)!}$: Binomialkoeffizient

Dann gilt:

a)

$$P(X = 20) = \binom{40}{20} \bullet 0{,}7^{20} \bullet 0{,}3^{40-20} = \frac{40!}{20! \bullet (40-20)!} \bullet 0{,}7^{20} \bullet 0{,}3^{20} \approx 0{,}00384$$

b)

$$P(X \geq 30) = \sum_{k=3}^{40} P(X = k) = P(X = 30) + P(X = 31) + \cdots + P(X = 40)$$
$$= \binom{40}{30} \bullet 0{,}7^{30} \bullet 0{,}3^{40-30} + \binom{40}{31} \bullet 0{,}7^{31} \bullet 0{,}3^{40-} \quad + \cdots + \binom{40}{40} \bullet 0{,}7^{40} \bullet 0{,}3^{40-40}$$
$$= \cdots \approx 0{,}3087$$

c)

$$P(X \leq 25) = \sum_{k=0}^{25} P(X = k) = P(X = 0) + P(X = 1) + \cdots + P(X = 25)$$
$$= \binom{40}{0} \bullet 0{,}7^{0} \bullet 0{,}3^{40-0} + \binom{40}{1} \bullet 0{,}7^{1} \bullet 0{,}3^{40-1} + \cdots + \binom{40}{25} \bullet 0{,}7^{25} \bullet 0{,}3^{40-2}$$
$$= \cdots \approx 0{,}1926$$

d) Für den Erwartungswert einer Binomialverteilung gilt (vgl. [1], S. 188):

$$E(X) = n \bullet p$$

Damit ist die mittlere Anzahl der Teile, die nicht nachgearbeitet werden muss:

$$E(X) = n \bullet p = 40 \bullet 0{,}7 = 28$$

Aufgabe 2.10

In einem Produktionswerk wird jede Lieferung einer Qualitätskontrolle unterzogen. Dabei werden 6 der 50 Teile entnommen und überprüft. X sei die zufällige Anzahl der dabei festgestellten Ausschussteile. Gesucht ist $P(X \leq 2)$ unter der Voraussetzung, dass die gesamte Lieferung 15 fehlerhafte Teile enthält.

Lösung:

Bei dieser Aufgabe handelt es sich um eine hypergeometrische Verteilung. Für diese gilt (vgl. [1], S. 188):

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Dabei ist:

- k: Anzahl der entnommenen Ausschussteile.
- $M = 15$: Gesamtzahl an Ausschussteile.
- $N = 50$: Gesamtzahl an Teilen.
- $n = 6$: Zahl der durchgeführten Stichproben.

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 6 zufällig entnommenen Teilen maximal 2 Ausschussteile sind. Zudem sei vorausgesetzt, dass die gesamte Lieferung 15 fehlerhafte Teile enthält.

Dann gilt:

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$= \frac{\binom{15}{0}\binom{50-15}{6-0}}{\binom{50}{6}} + \frac{\binom{15}{1}\binom{50-15}{6-1}}{\binom{50}{6}} + \frac{\binom{15}{2}\binom{50-15}{6-2}}{\binom{50}{6}}$$

$$= \frac{\binom{15}{0}\binom{35}{6}}{\binom{50}{6}} + \frac{\binom{15}{1}\binom{35}{5}}{\binom{50}{6}} + \frac{\binom{15}{2}\binom{35}{4}}{\binom{50}{6}} = \frac{\binom{15}{0}\binom{35}{6} + \binom{15}{1}\binom{35}{5} + \binom{15}{2}\binom{35}{4}}{\binom{50}{6}}$$

$$= \frac{1623160 + 4869480 + 5497800}{15890700} \approx 0{,}7546$$

Referenzen:

[1] *Luderer, B.; Nollau, V.; Vetters, K.:* Mathematische Formeln für Wirtschaftswissenschaftler, 8. Auflage, Wiesbaden: Springer Gabler 2015.