Übungsblatt 3 **Zuverlässigkeit I**

Aufgabe 3.1

In einer Produktionsserie von 1000 Bauteilen sei bekannt, dass 100 defekt sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man bei einer Stichprobe vom Umfang 25 genau 2 Bauteile findet, die nicht in Ordnung sind?

Lösung:

Bei dieser Aufgabe handelt es sich um eine hypergeometrische Verteilung. Für diese gilt (vgl. [1], S. 188):

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Dabei ist:

- $k = 2$: Zahl der gefundenen Bauteile, die nicht in Ordnung sind.
- $M = 100$: Gesamtzahl defekter Teile.
- $N = 1000$: Gesamtzahl an Teilen.
- $n = 25$: Zahl der durchgeführten Stichproben.

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 25 zufällig entnommenen Teilen genau 2 defekte Teile sind. Zudem sei vorausgesetzt, dass die gesamte Lieferung 100 fehlerhafte Teile enthält. Dann gilt:

$$P(X = 2) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{100}{2}\binom{1000-100}{25-2}}{\binom{1000}{25}} = \frac{\binom{100}{2}\binom{900}{23}}{\binom{1000}{25}}$$

$$\approx 0{,}2683$$

Aufgabe 3.2

Bei der Untersuchung der Lebensdauer X elektronischer Bauelemente wird festgestellt, dass $80\,\%$ der Bauelemente länger als $200\ h$, und $50\,\%$ der Bauelemente länger als $400\ h$ halten.

a) Wie viel Prozent aller Bauelemente, die länger als $200\ h$ halten, überleben auch $400\ h$?

b) Untersuchen Sie, ob die Ereignisse $P(X > 200\ h)$ und $P(X > 400\ h)$ stochastisch unabhängig voneinander sind!

Lösung:

a) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bauteil $400\ h$ überlebt, unter der Bedingung, dass es bereits länger als $200\ h$ gehalten hat. Diese Fragestellung kann mit der bedingten Wahrscheinlichkeit gelöst werden. Allgemein gilt für diese (vgl. [1], S. 185):

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Hier:

$$P(X > 400\ h | X > 200\ h) = \frac{P(X > 400\ h \cap X > 200\ h)}{P(X > 200\ h)} = \frac{P(X > 400\ h)}{P(X > 200\ h)} = \frac{0{,}5}{0{,}8} = 0{,}625$$

b) Zwei Ereignisse sind stochastisch unabhängig, wenn gilt (vgl. [1], S. 186):

$$P(A \cap B) = P(A) \bullet P(B) \Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$$

Hier:

$$P(X > 400\ h | X > 200\ h) = 0{,}625 \neq 0{,}5 = P(X > 400\ h)$$

Die beiden Ereignisse sind also nicht stochastisch unabhängig!

Aufgabe 3.3

Die Lebensdauer einer elektronischen Komponente sei exponentiell verteilt mit einer Ausfallrate von $\lambda = 0{,}5 \bullet 10^{-6}\ h^{-1}$.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Komponente vor Ablauf eines Jahres ($t = 8760\ h$) ausfällt?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Komponente zwischen 5 und 10 Jahren hält?
c) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, nach dem 95 % der Komponenten mit der genannten Ausfallrate ausgefallen sind!

Lösung:

Für die Dichtefunktion der Exponentialverteilung gilt (vgl. [1], S. 190):

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & t > 0 \end{cases}$$

Durch Integration und Einsetzen der Randbedingungen ($F(t \leq 0) = 0$ und $F(t \to \infty) = 1$) erhält man die dazugehörige Verteilungsfunktion:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & t > 0 \end{cases}$$

a) Die Wahrscheinlichkeit, dass die Komponente vor Ablauf eines Jahres ausfällt, beträgt:

$$P(t < 8760\ h) = F(8760\ h) = 1 - e^{-0{,}5 \bullet 10^{-6}\ h^{-1} \bullet 8760\ h} = 1 - e^{-0{,}00438}$$

$$\approx 1 - 0{,}99563 = 0{,}00437 = 4{,}37 \bullet 10^{-3}$$

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Komponente zwischen 5 und 10 Jahren hält, beträgt:

$$P(5a \leq t \leq 10a) = P(43800\,h \leq t \leq 87600\,h) = F(87600\,h) - F(43800\,h)$$

$$= 1 - e^{-0{,}5 \bullet 10^{-6}\,h^{-1} \bullet 87600\,h} - \left(1 - e^{-0{,}5 \bullet 10^{-6}\,h^{-1} \bullet 43800\,h}\right)$$

$$= 1 - e^{-0{,}0438} - (1 - e^{-0{,}0219}) = e^{-0{,}0219} - e^{-0{,}0438}$$

$$\approx 0{,}97834 - 0{,}95714 = 2{,}12 \bullet 10^{-2}$$

c) Zu bestimmen ist der Zeitpunkt t_1, an dem 95 % aller Komponenten ausgefallen sind. Zu diesem Zeitpunkt gilt:

$$F(t_1) = 0{,}95$$

Um t_1 zu erhalten, muss die Verteilungsfunktion nach t_1 umgestellt werden:

$$F(t_1) = 1 - e^{-\lambda t_1}$$

$$\Leftrightarrow 1 - F(t_1) = e^{-\lambda t_1}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{-\lambda t_1}\right) = -\lambda t_1 = \ln\left(1 - F(t_1)\right)$$

$$\Leftrightarrow t_1 = \frac{\ln\,(1 - F(t_1))}{-\lambda}$$

Damit ergibt sich:

$$t_1 = \frac{\ln\,(1 - 0{,}95)}{-0{,}5 \bullet 10^{-6}\,h^{-1}} = \frac{\ln\,(0{,}05)}{-0{,}5 \bullet 10^{-6}\,h^{-1}} \approx \frac{-2{,}9957}{-0{,}5 \bullet 10^{-6}\,h^{-1}} \approx 5{,}99 \bullet 10^{6}\,h$$

Aufgabe 3.4

Die MTTF (Mean Time To Failure) eines automatischen Steuerungssystems beträgt $640\,h$. Bestimmen Sie unter Annahme einer exponentiellen Verteilung $R(t_1), R(t_2), f(t_1)$ und $\mathrm{f}(t_2)$ für $t_1 = 120\,h$ und $t_2 = 640\,h$.

Lösung:

Für die Dichtefunktion der Exponentialverteilung gilt (vgl. [1], S. 190):

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & t > 0 \end{cases}$$

Durch Integration und Einsetzen der Randbedingungen ($F(t \leq 0) = 0$ und $F(t \to \infty) = 1$) erhält man die dazugehörige Verteilungsfunktion:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda} & t > 0 \end{cases}$$

$R(t) = 1 - F(t)$ steht für die Überlebenswahrscheinlichkeit. Für diese gilt:

$$R(t) = \begin{cases} 1 & t \leq 0 \\ e^{-\lambda t} & t > 0 \end{cases}$$

Die Ausfallrate λ (MTTF) entspricht dem Kehrwert der mittleren Lebensdauer $\bar{T}$:

$$\bar{T} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{640\ h} \approx 1{,}56 \bullet 10^{-3}\ h^{-1}$$

Damit lassen sich die gesuchten Werte berechnen:

$$R(t) = e^{-\lambda t} \qquad t > 0$$

$$R(t_1 = 120\ h) = e^{-1{,}56 \bullet 10^{-3}\ h^{-1} \bullet 120\ h} = e^{-0{,}1872} \approx 0{,}829$$

$$R(t_2 = 640\ h) = e^{-1{,}56 \bullet 10^{-3}\ h^{-1} \bullet 640\ h} = e^{-0{,}9984} \approx 0{,}368$$

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda} \ = \lambda \bullet R(t)$$

$$f(t_1 = 120\ h) = 1{,}56 \bullet 10^{-3}\ h^{-1} \bullet R(t_1 = 120\ h) = 1{,}56 \bullet 10^{-3}\ h^{-1} \bullet 0{,}829 \approx 1{,}29 \bullet 10^{-3}$$

$$f(t_1 = 640\ h) = 1{,}56 \bullet 10^{-3}\ h^{-1} \bullet R(t_2 = 640\ h) = 1{,}56 \bullet 10^{-3}\ h^{-1} \bullet 0{,}368 \approx 5{,}74 \bullet 10^{-4}$$

Aufgabe 3.5

Gegeben ist ein System aus n in Serie verschalteten Elementen mit der Verteilung

$$F_i(t) = 1 - e^{\lambda_i t} \qquad t \geq 0; \lambda_i > 0; i = 1, \dots, n$$

a) Geben Sie die Ausfallrate, Ausfallverteilung, Überlebenswahrscheinlichkeit und die mittlere Lebensdauer des Gesamtsystems an!
b) Wie lassen sich die Ergebnisse aus a) darstellen, wenn es im System m verschiedene Gruppen gibt, von denen die l-te Gruppe n_i Elemente mit der Ausfallwahrscheinlichkeit $F_i(t)$ enthält?
c) Was lässt sich für die Zuverlässigkeit und mittlere Lebensdauer eines Systems aus einer Serienschaltung schlussfolgern?

Lösung:

a) Bei einer Exponentialverteilung ist die Ausfallrate λ, und damit auch die mittlere Lebensdauer $\overline{T}$, konstant, d.h.:

$$\lambda_i(t) = \lambda_i \qquad \overline{T_i} = \frac{1}{\lambda_i} \qquad i = 1, \dots, n$$

Für das Gesamtsystem gilt dann:

$$\lambda_S(t) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \lambda_S = const$$

$$R_S(t) = e^{-\lambda_S t} = \prod_{i=1}^{n} R_i(t) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)t}$$

$$F_S(t) = 1 - e^{-\lambda_S t} = 1 - \prod_{i=1}^{n} R_i(t) = 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)t}$$

$$\overline{T} = \frac{1}{\lambda_S} = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n} = \frac{1}{\frac{1}{\overline{T_1}} + \frac{1}{\overline{T_2}} + \cdots + \frac{1}{\overline{T_n}}}$$

Bei einer Serienschaltung genügt die Ausfallwahrscheinlichkeitsverteilung des Systems also wieder dem Exponentialgesetz, wenn die einzelnen Elemente einer exponentiellen Ausfallwahrscheinlichkeitsverteilung folgen.

b) In einem komplizierten System gibt es immer Gruppen gleichartiger Elemente in dem Sinn, dass sie eine gleiche Ausfallwahrscheinlichkeitsverteilung besitzen. Angenommen, es gibt m verschiedene Gruppen, von denen die l-te Gruppe n_l Elemente mit der Ausfallwahrscheinlichkeitsverteilung $F_i(t)$ enthält ($l = 1, \dots, m$). Dann sehen die Gleichungen in der allgemeinen Form wie folgt aus:

$$\lambda_S(t) = n_1\lambda_1(t) + n_2\lambda_2(t) + \cdots + n_m\lambda_m(t)$$

$$R_S(t) = [R_1(t)]^{n_1} \bullet [R_2(t)]^{n_2} \bullet \dots \bullet [R_m(t)]^{n_m} = \prod_{l=1}^{m} [R_l(t)]^{n_l}$$

$$F_S(t) = 1 - R_S(t) = 1 - \prod_{l=1}^{m} [R_l(t)]^{n_l}$$

Für exponentielle Ausfallwahrscheinlichkeitsverteilung der Elemente ergibt sich:

$$\lambda_S(t) = n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 + \cdots + n_m\lambda_m = \lambda_S = const$$

$$R_S(t) = e^{-\lambda_S t} = e^{-(n_1\lambda_1+n_2\lambda_2+\cdots+n_m\lambda_m)t}$$

$$F_S(t) = 1 - e^{-\lambda_S t} = 1 - e^{-(n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 + \cdots + n_m\lambda_m)t}$$

$$\overline{T_S} = \frac{1}{n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 + \cdots + n_m\lambda_m} = \frac{1}{\frac{n_1}{\overline{T_1}} + \frac{n_2}{\overline{T_2}} + \cdots + \frac{n_m}{\overline{T_m}}}$$

Haben alle Elemente die gleiche Ausfallwahrscheinlichkeitsverteilung $F_1(t)$, so gilt:

$$R_S(t) = [R_1(t)]^n$$

$$\lambda_S(t) = n\lambda_1(t)$$

Im Falle einer Exponentialverteilung gilt wieder:

$$\lambda_S(t) = n\lambda_1 = \lambda_S$$

$$R_S(t) = e^{-n\lambda_1 t}$$

$$F_S(t) = 1 - e^{-n\lambda_1 t}$$

$$\overline{T_S} = \frac{1}{\frac{n}{\overline{T_1}}} = \frac{\overline{T_1}}{n}$$

c) Bezogen auf die Zuverlässigkeit und mittlere Lebensdauer eines Systems aus einer Serienschaltung lassen sich folgende Aussagen treffen:

- Bei einer Serienschaltung nimmt die Zuverlässigkeit des Systems in exponentieller Abhängigkeit von der wachsenden Zahl der Elemente ab. Die Systemzuverlässigkeit ist nicht größer als die Zuverlässigkeit des „schlechtesten Elements“ (eine Kette ist nicht stärker als ihr schwächstes Glied).
- Die mittlere Lebensdauer des Systems sinkt ebenfalls mit wachsender Elementanzahl.

Für die Praxis ergibt sich offensichtlich ein Widerspruch: Einerseits bestehen die modernen Systeme aus sehr vielen Elementen, während andererseits die Zuverlässigkeitsanforderungen an diese Systeme steigen.

Aufgabe 3.6

a) In einem System seien 5 Elemente in Serie geschaltet. Die Zuverlässigkeit dieser Elemente wird durch die Wahrscheinlichkeit ausfallfreier Arbeit im Zeitintervall $[0; t_0]$ charakterisiert:

$$R_1(t_0) = 0{,}98; R_2(t_0) = 0{,}95; R_3(t_0) = 0{,}9; R_4(t_0) = 0{,}85 \text{ und } R_5(t_0) = 0{,}7$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit ausfallfreier Arbeit des Systems im Intervall $[0; t_0]$?

b) Ein System bestehe aus 3 in Serie geschalteten Elementen, deren Lebensdauern exponentiell verteilt seien und die Erwartungswerte $\overline{T_1} = 160\ h, \overline{T_2} = 320\ h$ und $\overline{T_3} = 600\ h$ haben. Wie groß ist die mittlere Lebensdauer des Systems?

Lösung:

a) Für die Überlebenswahrscheinlichkeit $R_S(t)$ des Gesamtsystems gilt zum Zeitpunkt t_0 bei in Serie geschalteten Elementen:

$$R_S(t_0) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t_0) = 0{,}98 \bullet 0{,}95 \bullet 0{,}9 \bullet 0{,}85 \bullet 0{,}7 \approx 0{,}4986$$

b) Da die einzelnen Elemente einer exponentiell verteilten Lebensdauer folgen, gilt für die Ausfallrate λ_S des Gesamtsystems:

$$\lambda_S(t) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \lambda_S$$

Hier ergibt sich also:

$$\lambda_S = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

Für die mittlere Lebensdauer des Gesamtsystems ergibt sich dann:

$$\overline{T_S} = \frac{1}{\lambda_S} = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} = \frac{1}{\frac{1}{\overline{T_1}} + \frac{1}{\overline{T_2}} + \frac{1}{\overline{T_3}}} = \frac{1}{\frac{1}{160\ h} + \frac{1}{320\ h} + \frac{1}{600\ h}}$$

$$= \frac{1}{\frac{30 + 15 + 8}{4800\ h}} = \frac{4800\ h}{53} \approx 90{,}57\ h$$

Aufgabe 3.7

Es seien Elemente mit einer Überlebenswahrscheinlichkeit für die Zeit t_0 von $R(t_0) = 0{,}5$ vorhanden. Wie viele Elemente müssen parallelgeschaltet werden, damit die Systemzuverlässigkeit nicht kleiner als 0,99 ist?

Lösung:

Bei einer Parallelschaltung mehrerer Elemente gilt für die Ausfallwahrscheinlichkeit $F_S(t)$ des Gesamtsystems:

$$F_S(t) = \prod_{i=1}^{n} F_i(t)$$

Im Falle von n gleichartigen Elementen:

$$F_S(t) = [F(t)]^n$$

Für die Ausfallwahrscheinlichkeit $F(t_0)$ jedes einzelnen Elements gilt:

$$F(t_0) = 1 - R(t_0) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$$

Gesucht ist die Anzahl an Elementen, mit welcher zum Zeitpunkt t_0 eine Systemzuverlässigkeit (entsprechend der Überlebenswahrscheinlichkeit) von mindestens 0,99 erreicht wird:

$$R_S(t_0) = 1 - F_S(t_0) = 1 - [F(t_0)]^n = 1 - 0{,}5^n \geq 0{,}99$$

$$\Leftrightarrow 0{,}5^n \leq 1 - 0{,}99 = 0{,}01$$

Es gibt 2 Möglichkeiten, diese Ungleichung zu lösen:

Möglichkeit 1: Umformen der Ungleichung

$$0{,}5^n \leq 1 - 0{,}99 = 0{,}01$$

$$\Leftrightarrow \ln(0{,}5^n) \leq \ln(0{,}01)$$

$$\Leftrightarrow n \bullet \ln(0{,}5) \leq \ln(0{,}01)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}5)} \approx \frac{-4{,}60517}{-0{,}69315} \approx 6{,}64$$

Zu beachten ist, dass das Ungleichheitszeichen im letzten Schritt „umgedreht“ werden muss, da mit der Division durch $\ln(0{,}5)$ durch eine negative Zahl dividiert wird.

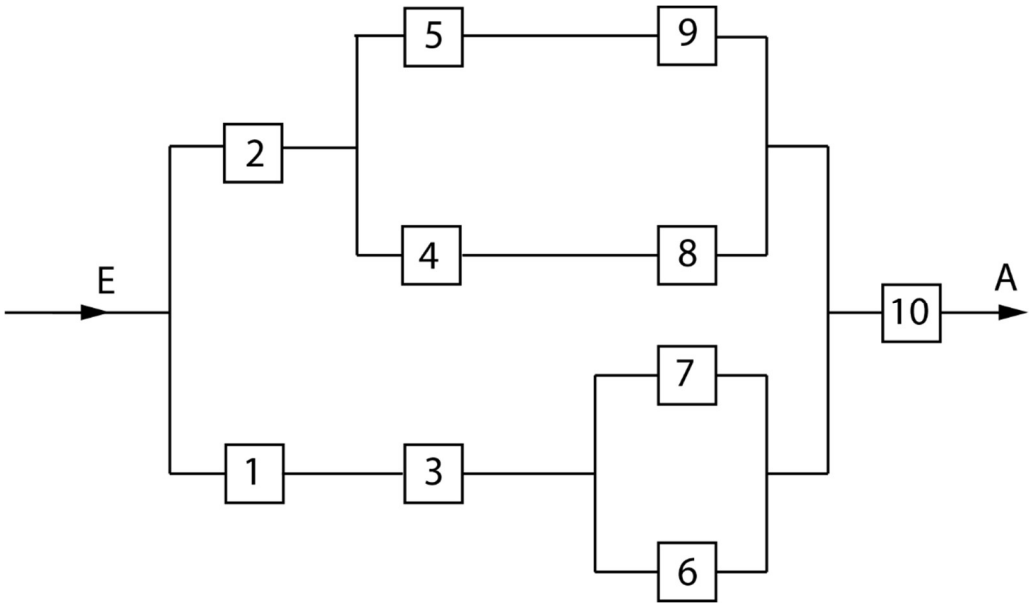
Möglichkeit 2: Ausprobieren von verschiedenen n

n	1	2	3	4	5	6	7
$0{,}5^n$	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125	0,015625	0,0078125

Natürlich führen beide Möglichkeiten zum gleichen Ergebnis: Es müssen $n = 7$ Elemente parallelgeschaltet werden, um eine Systemzuverlässigkeit von 0,99 zu erreichen.

Aufgabe 3.8

Bestimmen Sie die Zuverlässigkeits- und Ausfallwahrscheinlichkeitsfunktion des folgenden Gesamtsystems!



Lösung:

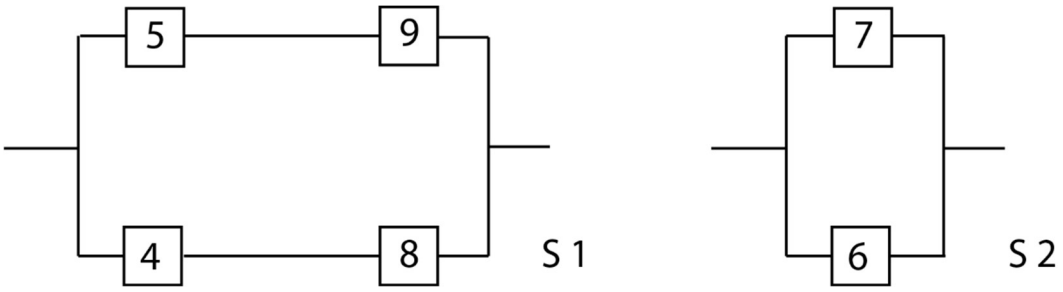
Allgemein gilt für eine Serienschaltung von n verschiedenen Elementen, dass die Überlebenswahrscheinlichkeit des Gesamtsystems dem Produkt der einzelnen Überlebenswahrscheinlichkeiten entspricht:

$$R_S = \prod_{i=1}^{n} R_i$$

Allgemein gilt für eine Parallelschaltung von n verschiedenen Elementen, dass die Ausfallwahrscheinlichkeit des Gesamtsystems dem Produkt der einzelnen Ausfallwahrscheinlichkeiten entspricht:

$$F_S = \prod_{i=1}^{n} F_i$$

Schritt 1) Zuerst betrachtet man die beiden „inneren“ Parallelschaltungen S_1 und S_2 des Systems:



Für die einzelnen Zweige von S_1 ergibt sich (Serienschaltung):

$$R_{S1,o} = R_5 R_9 \qquad\qquad R_{S1,u} = R_4 R_8$$

Für S_1 gilt dann (Parallelschaltung):

$$F_{S1} = F_{S1,o} F_{S1,u} = \left(1 - R_{S1,o}\right)\left(1 - R_{S1,u}\right) = (1 - R_5 R_9)(1 - R_4 R_8)$$

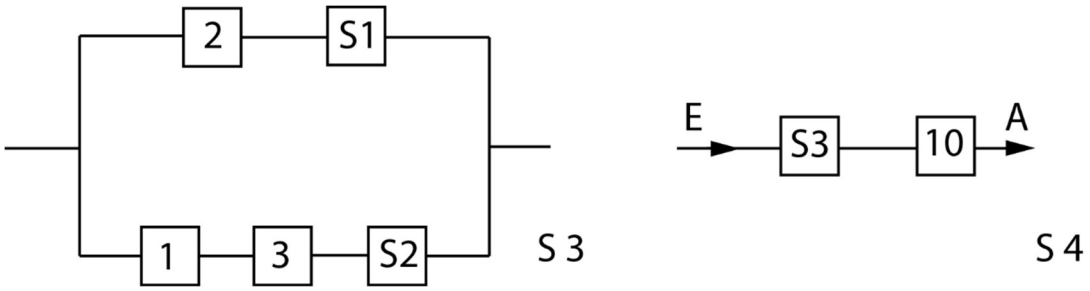
$$\rightarrow R_{S1} = 1 - F_{S1} = 1 - (1 - R_5 R_9)(1 - R_4 R_8)$$

Für S_2 gilt (Parallelschaltung):

$$F_{S2} = F_7 F_6 = (1 - R_7)(1 - R_6)$$

$$\rightarrow R_{S2} = 1 - F_{S2} = 1 - (1 - R_7)(1 - R_6)$$

Schritt 2) Danach kann man das System in die 2 Teilschaltungen S_3 und S_4 reduzieren:



Für die einzelnen Zweige von S_3 ergibt sich (Serienschaltung):

$$R_{S3,o} = R_2 R_{S1} \qquad\qquad R_{S3,u} = R_1 R_3 R_{S2}$$

Für S_3 gilt dann (Parallelschaltung):

$$F_{S3} = F_{S3,o} F_{S3,u} = \left(1 - R_{S1,o}\right)\left(1 - R_{S1,u}\right) = (1 - R_2 R_{S1})(1 - R_1 R_3 R_{S2})$$

$$\rightarrow R_{S3} = 1 - F_{S3} = 1 - (1 - R_2 R_{S1})(1 - R_1 R_3 R_{S2})$$

Für S_4 gilt (Reihenschaltung):

$$R_{S4} = R_{S3}R_{10}$$

Schritt 3) Damit gilt für das Gesamtsystem:

$$R_S = R_{S4} = R_{S3}R_{10} = [1 - (1 - R_2R_{S1})(1 - R_1R_3R_{S2})]R_{10}$$

$$= \{1 - [1 - R_2[1 - (1 - R_5R_9)(1 - R_4R_8)]][1 - R_1R_3[1 - (1 - R_7)(1 - R_6)]]\}R_{10}$$

$$F_S = 1 - R_S$$

$$= 1 - \{1 - [1 - R_2[1 - (1 - R_5R_9)(1 - R_4R_8)]][1 - R_1R_3[1 - (1 - R_7)(1 - R_6)]]\}R_{10}$$

Referenzen:

[1] *Luderer, B.; Nollau, V.; Vetters, K.:* Mathematische Formeln für Wirtschaftswissenschaftler, 8. Auflage, Wiesbaden: Springer Gabler 2015.