

Skript zur Vorlesung

Theoretische Physik I

- Klassische Mechanik -

Prof. Dr. Ludger Santen

Universität des Saarlandes
Geb. E2 6, Zi. 4.15
l.santen@mx.uni-saarland.de

<http://www.uni-saarland.de/index.php?id=4627>

Letzte Aktualisierung: 26. Juli 2013

Inhaltsverzeichnis

1	Newtonsche Mechanik	1
1.1	Die Newtonschen Gesetze	1
1.2	Inertialsysteme	2
1.3	Einige einfache Erhaltungssätze	3
1.4	Das Zweiteilchensystem	5
1.5	N -Teilchensysteme	7
1.6	Galileitransformation	9
1.7	Zwangsbedingungen und generalisierte Koordinaten	10
1.8	Variationsrechnung und Funktionale	12
1.8.1	Definition: Funktional	12
1.8.2	Funktionalableitung und -integration	13
1.9	Variationsrechnung	14
2	Prinzipien der kanonischen Mechanik:	
	Die Langrancheschen Gleichungen	17
2.1	Das d'Alembertsche Prinzip	17
2.2	Das Hamiltonsche Extremalprinzip	23
2.2.1	Lagrange-Gleichungen und Extremalprinzip	24
2.2.2	Das Hamiltonsche Prinzip für Systeme mit Zwangsbedingungen	25
2.3	Symmetrien und Erhaltungsgrößen	26
2.3.1	Das Noether-Theorem	27
2.3.2	Energieerhaltungssatz	30
3	Die Hamiltonschen Gleichungen	31
3.1	Legendre-Transformation	31
3.2	Hamiltonfunktion	33
3.3	Hamiltonsche Gleichungen und Hamiltonsches Prinzip	38
3.4	Die Poisson-Klammern	38
3.5	Kanonische Transformation	41
3.5.1	Allgemeine kanonische Transformationen	43
3.5.2	Kanonische Invarianten	47
3.6	Der Satz von Liouville	49
3.7	Infinitesimale kanonische Transformationen	51
3.8	Integrale der Bewegung	52
4	Die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung	54

5	Oszillationen	56
5.1	Die Bedeutung des Oszillatorpotentials	56
5.2	Die Entwicklung periodischer Funktionen in Fourierreihen . . .	58
5.2.1	Symmetrien	60
5.2.2	Funktionen mit endlichem Definitionsbereich	61
5.3	Gekoppelte Oszillationen: Eigenwertgleichungen und Hauptkoordinaten	63
5.4	Erzwungene Schwingungen und Dämpfung	66
5.5	Nichtlineare Schwingungen	70
5.6	Übergang zum schwingenden Kontinuum	73
5.6.1	Lösung der Wellengleichung	75
6	Mechanik des starren Körpers	78
6.1	Infinitesimale Verrückung eines starren Körpers	79
6.2	Eigenschaften des Trägheitstensors	81
6.3	Der Satz von Steiner	83
6.4	Kräftefreie Bewegung von starren Körpern	84
6.5	Die Eulerschen Gleichungen	85
6.6	Die Eulerschen Winkel	87

1 Newtonsche Mechanik

1.1 Die Newtonschen Gesetze

Die Newtonschen Gesetze von 1687 lauten in ihrer ursprünglichen Formulierung:

1. Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Bewegungszustand zu ändern.

Bemerkung:

Ohne äußere Kräfte ist also der *Geschwindigkeitsvektor* konstant und nicht nur sein Betrag.

2. Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.

Bemerkung:

Die mathematische Formulierung dieses Gesetzes führt auf die klassischen Bewegungsgleichungen.

3. Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich.

Diese Gesetze führen einige Begriffe ein, die wir genauer diskutieren werden.

- **Körper:** Hier werden zunächst mathematisch idealisierte Massepunkte betrachtet. Ausgedehnte (starre) Körper bzw. kontinuierliche Masseverteilungen werden gesondert diskutiert.
- Die Bewegung eines Körpers wird durch **Bahnkurven** $\mathbf{r}(t)$ im \mathbb{R}^3 beschrieben.

Beispiele:

- **Kreisförmige Bewegung** mit Radius R und Kreisfrequenz ω in der Höhe z_0 :

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cos(\omega t) \\ R \sin(\omega t) \\ z_0 \end{pmatrix}$$

- **Wurfparabel** mit Anfangsort

$$\mathbf{r}(t=0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix},$$

Anfangsgeschwindigkeit

$$\mathbf{v}(t=0) = \dot{\mathbf{r}}(t=0) = \begin{pmatrix} v_x \\ 0 \\ v_z \end{pmatrix}$$

und Erdbeschleunigung $\mathbf{g} = g \cdot \mathbf{e}_z$:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} v_x t + x_0 \\ 0 \\ v_z t + z_0 - gt^2/2 \end{pmatrix}$$

- Für eine **geradlinig gleichförmige Bewegung** gilt:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t$$

mit Anfangsort \mathbf{r}_0 und Anfangsgeschwindigkeit \mathbf{v}_0 .

Für die geradlinig gleichförmige Bewegung gilt offensichtlich:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}_0 \quad \text{und} \quad \mathbf{a}(t) \equiv \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) = 0.$$

1.2 Inertialsysteme

In einem **Inertialsystem** hat das zweite Newtonsche Gesetz die Form:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{p}} \tag{1}$$

mit dem Impuls $\mathbf{p}(t)$ und der äußeren Kraft \mathbf{F} .

Für den Impuls gilt:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m\dot{\mathbf{r}}, \tag{2}$$

wobei m die Masse des Körpers bezeichnet. Bleibt die Masse während der Bewegung konstant (Gegenbeispiel: Rakete), so gilt:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\ddot{\mathbf{r}}.$$

In einem Inertialsystem ist die kräftefreie Bewegung eines Körpers geradlinig gleichförmig, da $\dot{\mathbf{p}} = 0$ gilt ($m = \text{const.}$).

In Koordinatensystemen, die selbst beschleunigt sind, treten dagegen sogenannte Scheinkräfte auf (Zentrifugal- & Corioliskraft).

Satz:

Sei K ein Inertialsystem. Dann ist auch jedes sich mit *konstanter* Geschwindigkeit \mathbf{w} relativ zu K bewegendes Koordinatensystem K' ein Inertialsystem. Das Gesetz (1) gilt also auch in K' , wie man leicht nachrechnen kann.

1.3 Einige einfache Erhaltungssätze

1. Impulserhaltung

Wenn die Summe aller äußeren Kräfte \mathbf{F} , die auf einen Körper wirken, verschwindet, dann gilt $\dot{\mathbf{p}} = 0$ und somit die Erhaltung des Impulses.

2. Drehimpulserhaltung

Der **Drehimpuls** eines Teilchens ist definiert als:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad (3)$$

wobei \mathbf{r} den Vektor vom Koordinatenursprung zum Körper bezeichnet.

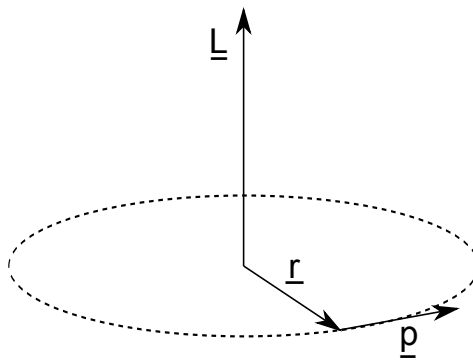


Abbildung 1: Definition des Drehimpulses.

Für unser Beispiel einer Kreisbewegung in der x - y -Ebene gilt:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cos(\omega t) \\ R \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} -R\omega \sin(\omega t) \\ R\omega \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

und damit:

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \\ &= mR^2\omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) \end{pmatrix} \\ &= m\omega R^2 \mathbf{e}_z .\end{aligned}$$

Für einen Körper, der sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω parallel zur x - y -Ebene bewegt, ist der Drehimpuls parallel zur z -Achse ausgerichtet. Für eine Bewegung im mathematisch positiven Sinne ist das Vorzeichen von \mathbf{L} positiv und umgekehrt.

Das **Drehmoment**¹ wird definiert durch:

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} . \quad (4)$$

Wir betrachten nun die zeitliche Änderung des Drehimpulses, die durch ($m = const.$):

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \dot{\mathbf{r}} \times m\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{N}$$

gegeben ist. Durch das Drehmoment wird also die Änderung des Drehimpulses festgelegt:

$$\dot{\mathbf{L}} \equiv \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N} . \quad (5)$$

Erhaltung des Drehimpulses:

Wenn das gesamte Drehmoment \mathbf{N} , das auf einen Körper wirkt, verschwindet, ist der Drehimpuls \mathbf{L} erhalten.

3. Energieerhaltung

Die von einem Körper geleistete **Arbeit** W ist durch das **Wegintegral**

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \, d\mathbf{s} \quad (6)$$

gegeben.

Wenn wir wiederum annehmen, dass $m = const.$ gilt, erhalten wir:

$$\int_1^2 \mathbf{F} \, d\mathbf{s} = m \int_1^2 \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot (\mathbf{v} \, dt) = \frac{m}{2} \int_1^2 \frac{d}{dt}(\mathbf{v})^2 \, dt$$

¹Wir passen uns hier der Notation von Goldstein et al an; gebräuchlich ist auch \mathbf{M} .

und damit:

$$W_{12} = \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) \equiv T_2 - T_1 .$$

Die geleistete Arbeit entspricht also der Änderung der **kinetischen Energie**

$$T = \frac{m}{2}v^2 . \quad (7)$$

Wenn die Änderung der Energie nicht vom Pfad abhängt, spricht man von einem **konservativem Kraftfeld**. Es gilt dann auch:

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0 . \quad (8)$$

Für konservative Kraftfelder existiert ein Potential, so dass:

$$\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r}) . \quad (9)$$

Damit erhalten wir auch $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -dV$.

Offensichtlich ändert sich das Kraftfeld nicht, wenn wir zum Potential eine Konstante hinzuaddieren.

Mit dem Potential können wir einen weiteren Erhaltungssatz formulieren:

Energieerhaltung:

Wenn die Kräfte, die auf einen Körper wirken, konservativ sind, ist die Gesamtenergie $T + V$ des Körpers erhalten, wobei mit V die potentielle Energie bezeichnet wird. Es gilt also $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$.

1.4 Das Zweiteilchensystem

Für ein System aus zwei Körpern mit Massen m_1 und m_2 gilt:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{21} \quad \text{sowie} \quad m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} .$$

Damit gilt dann auch:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = 0 .$$

Wenn man nun die **Schwerpunktkoordinaten**

$$\mathbf{r}_s := \frac{1}{m_1 + m_2}(m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2)$$

eingführt, gilt offenbar:

$$\ddot{\mathbf{r}}_s = \frac{1}{m_1 + m_2}(m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2) = 0 .$$

Der Schwerpunkt des Systems bewegt sich also geradlinig gleichförmig.

Interessanter ist die **Relativbewegung** der Körper. Wir führen dazu **Relativkoordinaten**

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

ein.

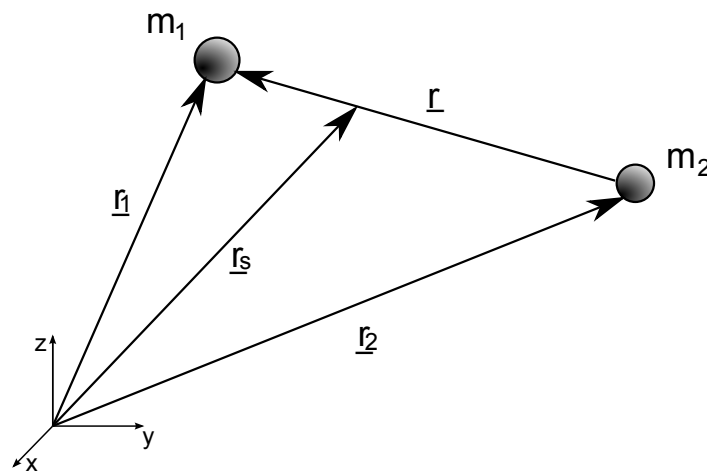


Abbildung 2: Schwerpunkt- und Relativkoordinaten.

Die ursprünglichen Koordinaten ergeben sich dann aus:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_s + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad , \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_s - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad .$$

Das Kraftgesetz für die Relativbewegung lautet damit:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_s + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\mathbf{r}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{12} \quad .$$

Mit der **reduzierten Masse**

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

gilt dann:

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{12} \quad .$$

Ein Beispiel für ein solches Kraftgesetz ist das Gravitationsgesetz, das auf das Keplerproblem führt.

Explizit gilt für das Gravitationspotential $V(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r}$:

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad .$$

Für das Drehmoment $\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$ gilt im Gravitationspotential:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mu \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} (\mathbf{r} \times \mathbf{r}) = 0 .$$

Der Drehimpuls ist also eine Erhaltungsgröße für ein Teilchen, das einer **Zentralkraft**

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r) \mathbf{r} \quad (10)$$

ausgesetzt ist. Die Gravitationskraft lässt sich aus dem Potential $V(r) = -\frac{A}{r}$ herleiten, wobei $A = Gm_1m_2$ ist. Damit ist auch die Gesamtenergie in dem System erhalten.

1.5 N -Teilchensysteme

Wir betrachten N Massenpunkte $\{m_1, m_2, \dots, m_N\}$. Zwischen den Körpern wirken die inneren Kräfte \mathbf{F}_{ik} . Ferner wirken die äußeren Kräfte \mathbf{K}_i auf die Massepunkte.

Wir nehmen an, dass die \mathbf{F}_{ik} Zentralkräfte sind. Damit gilt:

$$\mathbf{F}_{ik} = F_{ik}(r_{ik}) \frac{\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i}{r_{ik}} \quad \text{mit} \quad r_{ik} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k| .$$

$F_{ik}(r_{ik})$ sei eine skalare Funktion, die nur vom Abstand zwischen den Massepunkten i und k abhängt. Die Kräfte \mathbf{F}_{ik} seien **Potentialkräfte**, d.h.

$$\mathbf{F}_{ik} = -\nabla_k U_{ik}(r_{ik}) .$$

Die Bewegungsgleichungen haben dann die Form:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{k \neq i}^N \mathbf{F}_{ik} + \mathbf{K}_i ,$$

wobei $\mathbf{F}_{ki} = -\mathbf{F}_{ik}$ gilt und \mathbf{K}_i die äußeren Kräfte bezeichnen.

Für N -Teilchensysteme lassen sich verschiedene Erhaltungssätze herleiten:

Schwerpunktsatz:

Der Schwerpunkt bewegt sich wie ein Massepunkt der Masse $M = \sum_{i=1}^N m_i$ unter der Wirkung der äußeren Kraft $\mathbf{K} = \sum_{i=1}^N \mathbf{K}_i$, also:

$$M \ddot{\mathbf{r}}_s = \sum_{i=1}^N \mathbf{K}_i \quad \text{mit dem Schwerpunkt} \quad \mathbf{r}_s \equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i .$$

Drehimpulssatz:

Für die zeitliche Änderung des Gesamtdrehimpulses gilt:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{l}_i \right) = \sum_{j=1}^N \mathbf{r}_j \times \mathbf{K}_j .$$

Sie ist also die Summe der Drehmomente der äußeren Kräfte.

Energiesatz:

Die zeitliche Änderung der gesamten Energie ist gleich der Leistung der äußeren Kräfte:

$$\frac{d}{dt}(T + U) = \sum_{i=1}^N (\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{K}_i)$$

mit

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} v_i^2 \equiv \sum_i T_i \quad \text{und} \quad U = \sum_{i < k} U_{ik}(r_{ik}) .$$

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i &= -\nabla_i \left(\sum_{k \neq i} U_{ik}(r_{ik}) \right) + \mathbf{K}_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} T_i &= \frac{d}{dt} \left(\frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{r}}_i^2 \right) \\ &= \frac{m_i}{2} \frac{d}{dt} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \\ &= \frac{m_i}{2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i^2 \right) \ddot{x}_i + \left(\frac{\partial}{\partial \dot{y}_i} \dot{y}_i^2 \right) \ddot{y}_i + \left(\frac{\partial}{\partial \dot{z}_i} \dot{z}_i^2 \right) \ddot{z}_i \right] \\ &= m_i (\dot{x}_i \ddot{x}_i + \dot{y}_i \ddot{y}_i + \dot{z}_i \ddot{z}_i) \\ &= m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i \\ &= -\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \nabla_i \left(\sum_{k \neq i} U_{ik}(r_{ik}) \right) + \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{K}_i \end{aligned}$$

Wenn man nun über alle Teilchen summiert, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N T_i \right) &= \underbrace{- \sum_{i=1}^N \sum_{k \neq i} \dot{\mathbf{r}}_i \nabla_i U_{ik}(r_{ik})}_{= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \sum_{k=i+1}^N U_{ik}(r_{ik}) \quad (\text{Kettenregel})} + \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{r}}_i \mathbf{K}_i \\ &= - \frac{d}{dt} U + \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{r}}_i \mathbf{K}_i \end{aligned}$$

und damit die Behauptung.

Einen wichtigen Spezialfall stellen die **abgeschlossenen** N -Teilchensysteme dar, für die die äußeren Kräfte verschwinden.

Für abgeschlossene N -Teilchensysteme kann man insgesamt 10 Erhaltungsgrößen oder Integrationskonstanten angeben:

- den **Gesamtimpuls** $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = \text{const.}$,
- die **Gesamtenergie** $E = T + U = \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + T_{\text{rel}} + U$,
- der **Schwerpunktsatz** $\mathbf{r}_s(t) - \frac{1}{M} \mathbf{P}t = \mathbf{r}_s(0)$,
- der **Gesamtdrehimpuls** $\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{l}_i = \mathbf{r} \times \mathbf{P} + \mathbf{l}_{\text{rel}}$.

1.6 Galileitransformation

Die allgemeine Transformation, die Inertialsysteme wieder auf Inertialsysteme abbildet hat die folgende Form:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' &= \underline{\underline{R}} \mathbf{r} + \mathbf{w} + \mathbf{a} & \text{mit} & \quad \underline{\underline{R}} \in O(3), \det(\underline{\underline{R}}) = \pm 1 \\ t \rightarrow t' &= \lambda t + s & \text{mit} & \quad \lambda = \pm 1 \end{aligned}$$

$\underline{\underline{R}}$ beschreibt eine eigentliche (uneigentliche) Drehung, falls $\det(\underline{\underline{R}}) = +1$ ($\det(\underline{\underline{R}}) = -1$). \mathbf{w} ist ein konstanter Geschwindigkeitsvektor und \mathbf{a} eine konstante Verschiebung.

Die allgemeine Transformation hängt von 10 Parametern (drei Drehwinkel, jeweils drei Komponenten von \mathbf{a} , \mathbf{w} und s) ab. Dies entspricht der Zahl der Erhaltungsgrößen im abgeschlossenen n -Teilchensystem!

Wir werden später den Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrößen genauer betrachten.

Hier halten wir fest, dass aus der Invarianz unter

- Zeittranslation die Erhaltung der Gesamtenergie,
- räumlicher Translation die Impulserhaltung,
- und der Invarianz gegenüber Drehungen die Drehimpulserhaltung folgt.

Schließlich gilt, dass die Größe

$$\mathbf{r}_s(0) = \mathbf{r}_s(t) - \frac{\mathbf{P}}{M}t$$

unter der Transformation $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{w}$ invariant bleibt.

1.7 Zwangsbedingungen und generalisierte Koordinaten

Die Einführung geeigneter Koordinaten ist ein wichtiger Schritt bei der Lösung der Bewegungsgleichungen. Koordinatentransformationen können beispielsweise dazu dienen Freiheitsgrade des Systems zu entkoppeln und damit die Lösung stark zu vereinfachen.

Beispiel: Für Zentralkräfte, für die $V(\mathbf{r}) = V(r)$ gilt, ist die Einführung von Kugelkoordinaten sinnvoll.

Solche Koordinaten werden **generalisierte Koordinaten** q_i genannt. Es gilt der Zusammenhang

$$\mathbf{r}_i(t) = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t), \quad i = 1, \dots, N$$

für ein N -Teilchensystem im dreidimensionalen Raum.

Bemerkung:

Für N ausgedehnte Körper beträgt die Zahl der Freiheitsgrade $6N$ in 3D, da die Orientierung festgelegt werden muss.

Bei den meisten physikalischen Problemen treten **Zwangs-** oder **Nebenbedingungen** auf, wie beispielsweise bei einem Zylinder, der auf einer Fläche rollt. Man unterscheidet:

Holonome Nebenbedingungen, die in der Form:

$$f_i(q_1, \dots, q_{3N}, t) = 0, \quad i = 1, \dots, k \quad (11)$$

geschrieben werden können. Durch k holonome Nebenbedingungen reduziert sich die Zahl der Freiheitsgrade auf $3N - k$.

Nicht-holonome Nebenbedingungen lassen sich nicht durch Gleichungen zwischen generalisierten Koordinaten in der Form (11) beschreiben.

Beispiele:

- **Ebenes Pendel:**

In Kugelkoordinaten gilt offensichtlich: $r - L = 0$, $\varphi - \varphi_0 = 0$
(holonome Zwangsbedingung)

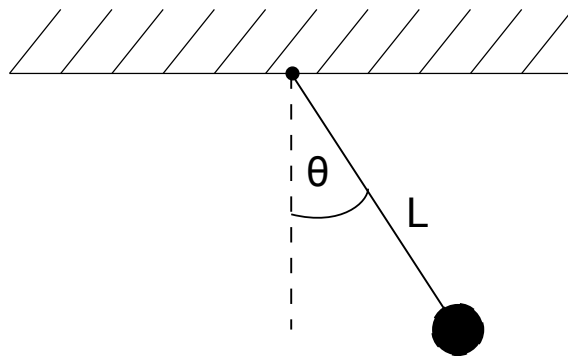


Abbildung 3: Ebenes Pendel.

- **Rollende Kreisscheibe:**

Wir betrachten eine Kreisscheibe die sich in der x - y -Ebene bewegt. Die Bewegung der Kreisscheibe wird durch die x - y -Koordinate des Mittelpunktes, den Rotationswinkel ϕ um die Achse der Scheibe und den Winkel θ zwischen Rotations- und x -Achse beschrieben.

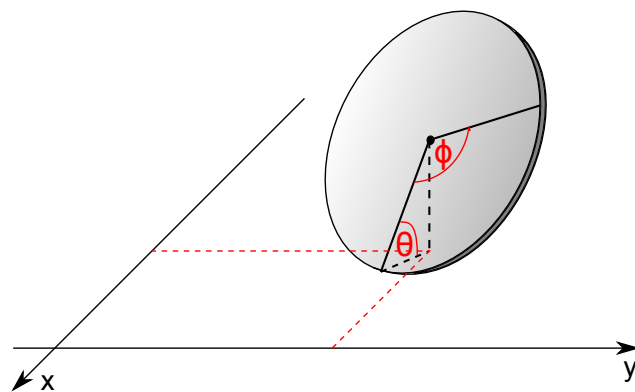


Abbildung 4: Rollende Kreisscheibe.

Offenbar gilt:

$$|\mathbf{v}| = v = a\dot{\phi} ,$$

da der Betrag der Geschwindigkeit proportional zur Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}$ ist.

Für die Komponenten von \mathbf{v} gilt:

$$\dot{x} = v \sin(\theta) \quad \text{und} \quad \dot{y} = -v \cos(\theta)$$

und mit der obigen Bedingung für v gilt:

$$dx - a \sin(\theta)d\phi = 0 \quad \text{und} \quad dy + a \cos(\theta)d\phi = 0 .$$

Die Zwangsbedingungen lassen sich nur in differentieller Form schreiben und sind daher nicht holonom. Die Gleichungen lassen sich nicht unabhängig integrieren, da der Zusammenhang zwischen θ und ϕ nicht festgelegt ist.

Weitere Beispiele für nicht-holonome Zwangsbedingungen sind Ungleichungen.

Man unterscheidet ferner **zeitabhängige Zwangsbedingungen**, die man **rheonom** nennt, und **zeitunabhängige (skleronom)**.

1.8 Variationsrechnung und Funktionale

In diesem Abschnitt werden einige Prinzipien der Variationsrechnung erläutert, die wir im anschließenden Kapitel benötigen.

1.8.1 Definition: Funktional

Ein Funktional ist eine Abbildung aus dem Funktionenraum \mathbb{X} in die reellen bzw. komplexen Zahlen, also:

$$\phi : f \in \mathbb{X} \rightarrow \phi[f] \in \mathbb{C} . \quad (12)$$

Beispiel: Integrale über Funktionen, Normen, Skalarprodukte wie:

$$\phi[f] = \int_{\mathbb{R}} dx u(x)f(x)$$

mit der festen Funktion $u(x)$.

Für **lineare Funktionale** gilt:

$$\phi[\alpha f + \beta g] = \alpha\phi[f] + \beta\phi[g] . \quad (13)$$

Beispiele: $\phi[f] = \int_a^b dx f(x)$ ist ein lineares Funktional, da:

$$\begin{aligned}\phi[\alpha f + \beta g] &= \int_a^b dx (\alpha f + \beta g) \\ &= \alpha \int_a^b dx f(x) + \beta \int_a^b dx g(x) \\ &= \alpha \phi[f] + \beta \phi[g] .\end{aligned}$$

Explizit ergibt sich für $f(x) = 1 = \text{const.}$:

$$\phi[1] = b - a$$

und für

$$\phi[\alpha x^{n-1}] = \alpha \frac{b^n - a^n}{n} .$$

Umgekehrt ist $\phi[f] = \int_a^b dx f^2(x)$ nicht linear, da beispielsweise gilt:

$$\phi[\alpha f] = \alpha^2 \phi[f] .$$

1.8.2 Funktionalableitung und -integration

Bevor wir die Funktionalableitung einführen, erinnern wir kurz an die Definition der Ableitung von Funktionen einer Variablen.

Für gewöhnliche Funktionen kann man die Ableitung über die lineare Näherung einführen:

Zu jeder Funktion $f(x)$ existiert eine weitere Funktion $\frac{df(x)}{dx}$ für die gilt:

$$\left| f(x+h) - f(x) - \frac{df(x)}{dx} h \right| = \mathcal{O}(h) ,$$

wobei $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{O}(h)}{h} = 0$ und \mathcal{O} die Ordnung angibt.

Dieses Konzept wollen wir nun auf Funktionale verallgemeinern. Wir betrachten dazu die Änderung des Arguments von $\phi[f]$ um einen additiven Beitrag $h(x)$, also $\phi[f+h]$. Dann ist die lineare Näherung $\frac{\delta\phi}{\delta f(x)}$ gegeben durch:

$$\left| \phi[f+h] - \phi[f] - \int dx \frac{\delta\phi}{\delta f}(x) h(x) \right| = \mathcal{O}(\|h\|) .$$

Bemerkungen:

- Wir setzen voraus, dass f und h zweimal stetig differenzierbare Funktionen auf einem Banach-Raum \mathbb{X} (vollständiger normierter Raum) sind.

- $\frac{\delta\phi}{\delta f} \in \mathbb{X}$ nennt man **Funktional-** oder **Fréchet-Ableitung**.
- $\mathcal{O}(\|h\|)$ beschreibt einen Ausdruck, der schneller als linear in der Norm von $\|h\|$ verschwindet.

Beispiel: Wir betrachten das Funktional:

$$\phi[f] = \int_{\mathbb{R}} dx u(x) f(x) .$$

Dann gilt:

$$\phi[f + h] = \int_{\mathbb{R}} dx u(x) (f(x) + h(x)) = \phi[f] + \phi[h]$$

und somit:

$$\begin{aligned} \phi[h] &= \int_{\mathbb{R}} dx u(x) h(x) = \int_{\mathbb{R}} dx \frac{\delta\phi}{\delta f}(x) h(x) \\ \Rightarrow \frac{\delta\phi}{\delta f} &= u(x) . \end{aligned}$$

Analog ergibt sich:

$$\frac{\delta\phi[f]}{\delta f(x)} = 1 \quad \text{für das lineare Funktional}$$

und

$$\frac{\delta\phi[f]}{\delta f(x)} = 2f(x) \quad \text{für } a < x < b \quad \text{und} \quad \phi[f] = \int_a^b dx f^2(x).$$

Man kann für die Funktionalableitung auch weitere Rechenregeln ableiten, wie zum Beispiel die Produktregel oder die Regel:

$$\frac{\delta(\phi[f])^n}{\delta f} = n(\phi[f])^{n-1} \frac{\delta\phi}{\delta f} .$$

1.9 Variationsrechnung

Die Variationsrechnung beschäftigt sich mit der Bestimmung von Extremwerten von Funktionalen, wie beispielsweise der Bestimmung des kürzesten Weges auf einer gekrümmten Fläche. Dabei sind die Anfangs- und Endpunkte festgehalten und die Funktion $y(t)$ wird variiert.

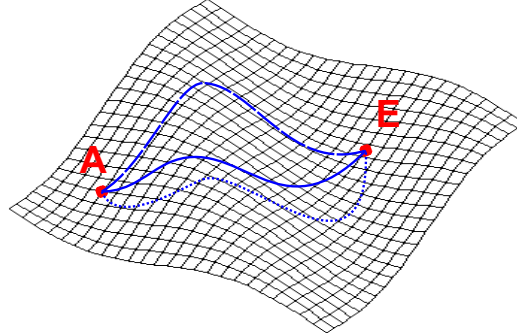


Abbildung 5: Bestimmung des kürzesten Weges auf einer gekrümmten Fläche.

Im Hinblick auf die Anwendung in der Mechanik betrachten wir ein Funktional der Form:

$$S[y] = \int_a^b dt f(y(t), \dot{y}(t), t) .$$

Wir betrachten nun:

$$\begin{aligned} S[y + h] &= \int_a^b dt f(y(t) + h(t), \dot{y}(t) + \dot{h}(t), t) \\ &= \int_a^b dt \left(f(y, \dot{y}, t) + h \frac{\partial f}{\partial y} + \dot{h} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} + \mathcal{O}(h^2) \right) . \end{aligned}$$

Damit wir einen Ausdruck linear in $h(t)$ erhalten, müssen wir partiell integrieren. Wir nutzen dazu aus, dass $h(a) = h(b) = 0$ gilt und somit $h(t) \frac{\partial f(y, \dot{y}, t)}{\partial \dot{y}}$ am Rand verschwindet. Es gilt also:

$$S[y + h] = \int_a^b dt \left(f(y, \dot{y}, t) + h \frac{\partial f}{\partial y} - h \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} + \mathcal{O}(h^2) \right) .$$

Die Funktionalableitung lautet daher:

$$\frac{\delta S[y]}{\delta y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} .$$

Das Funktional nimmt einen Extremwert an, wenn $\frac{\delta S}{\delta y} = 0$, also:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = 0 \quad (\text{Euler-Lagrange-Gleichung}) \quad (14)$$

gilt.

Beispiel: Kürzeste Verbindung zwischen $(0; 1)$ und $(4; -3)$

$$\Rightarrow S[y] = \int_0^4 dx \sqrt{1 + y'^2}$$

Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{1 + y'^2} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial}{\partial y'} \sqrt{1 + y'^2} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0 \\ \Rightarrow & \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c \\ \Leftrightarrow & y'^2 = \frac{c^2}{1 - c^2} \equiv b^2 \\ \Leftrightarrow & y' = b \qquad \Rightarrow \qquad y = a + bx \end{aligned}$$

Durch $y(0) = a = 1$ und $y(4) = 1 + 4b = -3$
werden die Konstanten $a = 1$ und $b = -1$ festgelegt.

2 Prinzipien der kanonischen Mechanik: Die Langrangeschen Gleichungen

Die kanonische Formulierung der klassischen Mechanik bietet die Möglichkeit in eleganter Weise die Zwangsbedingungen eines mechanischen Systems zu berücksichtigen und die Bewegungsgleichungen in unabhängigen Koordinaten zu formulieren. Der Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrößen ergibt sich in einfacher Weise.

2.1 Das d'Alembertsche Prinzip

Eine sogenannte **virtuelle Verrückung** ist eine infinitesimale Änderung $\delta \mathbf{r}_i$ aller Koordinaten \mathbf{r}_i , die mit den Zwangskräften vereinbar sind. Der Begriff „virtuell“ könnte auch durch „instantan“ ersetzt werden, da vorausgesetzt wird, dass sich die Zwangskräfte nicht verändern (was für endliche Zeitintervalle nicht vorausgesetzt werden kann).

Wir nehmen an, dass sich das System im Gleichgewicht befindet, das heißt, dass die Summe aller Kräfte auf alle beliebigen Teilchen verschwindet:

$$\mathbf{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

und somit trivialerweise:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 .$$

Wenn man nun die Kräfte in tatsächlich wirkende Kräfte $\mathbf{F}_i^{(a)}$ und Zwangskräfte \mathbf{f}_i aufteilt ergibt sich:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 .$$

Wir befassen uns nun mit solchen Systemen, in denen die Zwangskräfte keine **virtuelle Arbeit** verrichten, also $\sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$. Damit gilt dann für ein mechanisches System im Gleichgewicht:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 . \tag{15}$$

Bemerkungen:

- Im Gegensatz zu den Kräften \mathbf{F}_i gilt nicht, dass die einzelnen Summanden verschwinden, da die $\delta\mathbf{r}_i$ mit den Zwangsbedingungen kompatibel sein müssen. Sie sind also nicht zwangsläufig unabhängig.
- Die Arbeit $\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i$, die durch virtuelle Verrückungen geleistet wird, nennt man auch **virtuelle Arbeit**.

Bislang betrifft Gleichung (15) nur die Statik des Systems. Wir wollen nun aber *Bewegungsgleichungen* herleiten, die wie (15) keine Zwangskräfte enthalten.

Dazu formen wir die Gleichung $\mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{p}}_i$ in geeigneter Weise um.

Wir betrachten den Ausdruck $\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i = 0$. Damit haben wir durch die Einführung der „Reaktionskraft“ $-\dot{\mathbf{p}}_i$ wieder eine Gleichgewichtsbedingung formuliert. Es gilt offensichtlich:

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0 .$$

Zerlegen wir wiederum \mathbf{F}_i in $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(a)} + \mathbf{f}_i$, ergibt sich:

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i^{(a)} + \mathbf{f}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta\mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0 .$$

Da wir wiederum voraussetzen, dass die virtuellen Kräfte keine Arbeit verrichten, ergibt sich:

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0 . \quad (16)$$

Diesen Ausdruck nennt man das **d'Alembertsche Prinzip**.

Da wir nun die Zwangskräfte eliminiert haben, müssen wir nicht mehr zwischen \mathbf{F}_i und $\mathbf{F}_i^{(a)}$ unterscheiden und bezeichnen die wirkenden Kräfte von nun an als \mathbf{F}_i .

Wir betrachten im Weiteren die Gleichung (16) als Ausgangspunkt und führen **generalisierte Koordinaten** q_i mit $i = 1, 2, \dots, n$ ein.

Aus $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ ergibt sich dann:

$$\mathbf{v}_i \equiv \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} .$$

Ähnlich gilt für die virtuellen Verrückungen:

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j .$$

Und somit:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \equiv \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j ,$$

wobei wir mit:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = Q_j$$

die **generalisierten Kräfte** bezeichnen.

Bemerkung:

Die generalisierten Koordinaten q_j haben nicht zwangsläufig die Dimension einer Länge. Damit haben die Q_j auch nicht zwangsläufig die Dimension einer Kraft. $Q_j \delta q_j$ muss aber immer die Dimension einer Arbeit besitzen. (Beispiel: Q_j Drehmoment; δq_j differentieller Winkel.)

Nun wenden wir uns dem zweiten Ausdruck in (16) zu:

$$\sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j .$$

Es gilt:

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - \underbrace{m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right)}_{m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial}{\partial q_j} \dot{\mathbf{r}}_i} \quad (17)$$

und:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} .$$

Weiterhin ergibt sich:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} .$$

Durch Einsetzen in (17) erhalten wir:

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} \right],$$

so dass sich insgesamt für $\sum_{i=1}^N (\dot{\mathbf{p}}_i - \mathbf{F}_i^{(a)}) \cdot \delta \mathbf{r}_i$ ergibt:

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \underbrace{\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right]}_{\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left(m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right)} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right)}_{m_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j}} - \underbrace{Q_j}_{\sum_i \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}} \right\} \delta q_j.$$

Mit der kinetischen Energie $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2$ ergibt sich dann für das d'Alembertsche Prinzip in generalisierten Koordinaten:

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right\} \delta q_j = 0. \quad (18)$$

Bemerkung:

In kartesischen Koordinaten hängt T nur von den Geschwindigkeiten ab, so dass $\frac{\partial T}{\partial x_i} = 0$. Dies ist für generalisierte Koordinaten jedoch nicht immer der Fall.

Bislang hatten wir vorausgesetzt, dass die Zwangskräfte keine virtuelle Arbeit leisten. Für *holonome* Zwangsbedingungen ist es dagegen immer möglich einen Satz *unabhängiger Koordinaten* zu finden, die die Zwangsbedingungen *implizit* berücksichtigen. Dann sind auch die virtuellen Verrückungen unabhängig, so dass für alle Summanden gilt:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j.$$

Wir betrachten nun Potentialkräfte $\mathbf{F}_i = -\nabla_i V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)$. Dann gilt:

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^N \nabla_i V \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \equiv - \frac{\partial V}{\partial q_j}.$$

Damit ergibt sich dann für Potentialkräfte:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0.$$

Bemerkungen:

- Da wir auch explizit zeitabhängige Potentiale zugelassen haben, haben wir bislang noch keine Energieerhaltung vorausgesetzt.
- V hängt nicht von den generalisierten Geschwindigkeiten ab. Daher gilt auch:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial(T - V)}{\partial q_j} = 0 .$$

Wenn wir nun T und V zur sogenannten **Lagrange-Funktion**

$$L = T - V \tag{19}$$

zusammenfassen, ergibt sich:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 . \tag{20}$$

Dies sind die **Euler-Lagrange-Gleichungen zweiter Art**.

Bemerkung:

Die Lagrangegleichung gelte für unabhängige generalisierte Koordinaten.

Beispiel: Wir betrachten eine Punktmasse auf einer Kugelschale im Gravitationsfeld. Wir legen den Koordinatenursprung nun so, dass die Masse m auf der Kugelschale immer den Abstand $|\mathbf{r}| = R$ hat.

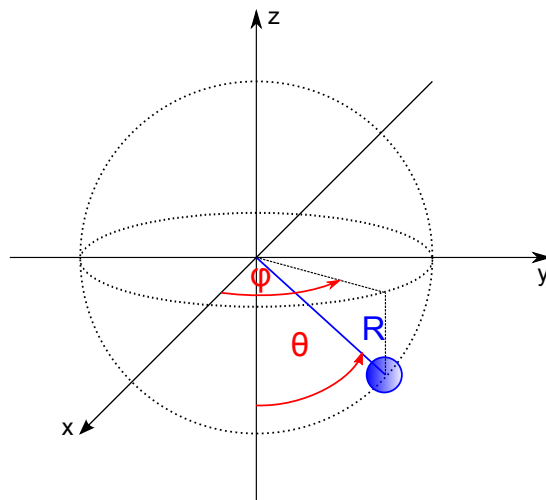


Abbildung 6: Sphärisches Pendel.

Die Zwangsbedingung ist also holonom, so dass das Problem in unabhängigen generalisierten Koordinaten beschrieben werden kann. Dann gilt mit:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} R \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ R \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ R \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{F} = -mg\mathbf{e}_z = F_z\mathbf{e}_z$$

in generalisierten Koordinaten $q_1 = \theta$, $q_2 = \varphi$:

$$Q_1 = \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} = -F_z R \sin(\theta) = mgR \sin(\theta) \quad \text{und} \quad Q_2 = 0.$$

Die Q_i sind Potentialkräfte mit $U(q_1, q_2) = mgR(1 + \cos(q_1))$. Weiterhin gilt:

$$\dot{\mathbf{r}} = R \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cos(\theta) \dot{\theta} - \sin(\varphi) \dot{\varphi} \sin \theta \\ \sin(\varphi) \cos(\theta) \dot{\theta} + \cos(\varphi) \dot{\varphi} \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) \dot{\theta} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}^2 &= R^2 \left[\left(\cos(\varphi) \cos(\theta) \dot{\theta} - \sin(\varphi) \dot{\varphi} \sin \theta \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. \left(\sin(\varphi) \cos(\theta) \dot{\theta} + \cos(\varphi) \dot{\varphi} \sin(\theta) \right)^2 + \sin^2(\theta) \dot{\theta}^2 \right] \\ &= R^2 \left[\cos^2(\varphi) \cos^2(\theta) \dot{\theta}^2 - 2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \dot{\varphi} \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\theta} \right. \\ &\quad \left. + \sin^2(\varphi) \dot{\varphi}^2 \sin^2(\theta) + \sin^2(\varphi) \cos^2(\theta) \dot{\theta}^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \dot{\varphi} \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\theta} + \cos^2(\varphi) \dot{\varphi}^2 \sin^2(\theta) \right. \\ &\quad \left. + \sin^2(\theta) \dot{\theta}^2 \right] \\ &= R^2 \left[\cos^2(\theta) \dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta) \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2(\theta) \right] \\ &= R^2 \left[\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2(\theta) \right] \\ &= R^2 \left[\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 \sin^2(q_1) \right] \end{aligned}$$

und somit:

$$T = \frac{mR^2}{2} \left[\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 \sin^2(q_1) \right]$$

(folgt aus $T = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2$ und einsetzen der generalisierten Koordinaten).

Damit erhalten wir:

$$L = \frac{1}{2}mR^2 [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 \sin^2(q_1)] - mgR [1 + \cos(q_1)] .$$

Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_1} &= mR^2 \dot{q}_2^2 \sin(q_1) \cos(q_1) + mgR \sin(q_1) & \frac{\partial L}{\partial q_2} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} &= mR^2 \dot{q}_1 & \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} &= mR^2 \dot{q}_2 \sin^2(q_1) \end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichungen haben daher die Form:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 - \left[\dot{q}_2^2 \cos(q_1) + \frac{g}{R} \right] \sin(q_1) &= 0 , \\ \ddot{q}_2 \sin^2(q_1) + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(q_1) \cos(q_1) &= 0 . \end{aligned}$$

2.2 Das Hamiltonsche Extremalprinzip

Wir haben im vorigen Abschnitt gesehen, dass die Lagrange-Gleichungen und damit die Bewegungsgleichungen aus dem Prinzip folgen, dass die Zwangskräfte keine virtuelle Arbeit leisten und den Begriff der virtuellen Verrückung $\delta \mathbf{r}_i$ eingeführt.

Das **Hamiltonsche Prinzip** bietet einen alternativen Zugang.

Einem mechanischen System mit n Freiheitsgraden, die durch die unabhängigen generalisierten Koordinaten q_1, q_2, \dots, q_n beschrieben werden, sei eine C^2 -Funktion² der Variablen q_i und \dot{q}_i , mit $i = 1, 2, \dots, n$, $L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$ zugeordnet, die sogenannte Lagrange-Funktion.

Weiterhin betrachten wir eine Bahnkurve $\varphi(t) = \{\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\}$ im Intervall $t_1 \leq t \leq t_2$. Es gilt $\varphi(t_1) = \mathbf{a}$ und $\varphi(t_2) = \mathbf{b}$.

Für eine solche *physikalische Bahnkurve* $\varphi(t)$ ist das Funktional

$$I := \int_{t_1}^{t_2} dt L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t)$$

extremal.

Bemerkung:

Das Funktional hat die Dimension einer Wirkung, also Energie·Zeit.

²Eine C^2 -Funktion ist eine zweimal stetig differenzierbare Funktion.

2.2.1 Lagrange-Gleichungen und Extremalprinzip

Satz:

Das Funktional I ist dann für $\varphi(t)$ extremal, wenn $\varphi(t)$ die Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{\delta L}{\delta q_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

erfüllt.

Beweis: Wir nehmen an, dass $\mathbf{q}(t, \alpha) = \varphi(t) + \alpha\psi(t)$ ist, wobei:
 $-1 \leq \alpha \leq 1$ und $\psi(t_1) = \psi(t_2) = 0$, $\psi(t)$ stetig.

Falls I für $\varphi(t)$ extremal ist gilt:

$$\left[\frac{d}{d\alpha} I(\alpha) \right]_{\alpha=0} = 0$$

mit

$$I(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\mathbf{q}(t, \alpha), \dot{\mathbf{q}}(t, \alpha), t).$$

Es gilt weiterhin:

$$\frac{d}{d\alpha} I(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{dq_k}{d\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\dot{q}_k}{d\alpha} \right) dt.$$

Wenn wir nun den zweiten Term partiell integrieren, erhalten wir:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\dot{q}_k}{d\alpha} = \underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{dq_k}{d\alpha} \right]_{t_1}^{t_2}}_{=0, \text{ da } \left[\frac{dq_k}{d\alpha} \right]_{t_1}^{t_2} = \psi(t_2) - \psi(t_1) = 0 - 0} - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \frac{dq_k}{d\alpha},$$

so dass sich insgesamt ergibt:

$$\left[\frac{d}{d\alpha} I(\alpha) \right]_{\alpha=0} = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right] \psi_k(t) = 0.$$

Da die Funktionen $\psi_k(t)$ beliebig und unabhängig sind, muss

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0$$

gelten, so dass die Euler-Lagrange-Gleichungen folgen.

2.2.2 Das Hamiltonsche Prinzip für Systeme mit Zwangsbedingungen

Wir betrachten nun ein System mit m Zwangsbedingungen f_α und den zugehörigen Lagrange-Multiplikatoren λ_α (siehe Anhang). Dann ergibt sich:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(L + \sum_{\alpha=1}^m \lambda_\alpha f_\alpha \right) .$$

Wir variieren q_α und λ_α unabhängig voneinander, so dass wir $n + m$ Gleichungen erhalten. Es gilt:

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \sum_{\alpha=1}^m \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_k} \right) \delta q_k = 0 .$$

Durch die Zwangsbedingungen sind die δ_k nicht unabhängig. Wir betrachten nun m Gleichungen der Form:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \sum_{\alpha=1}^m \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_k} = 0 .$$

In den übrigen $n - m$ Gleichungen kommen die Zwangskräfte nicht vor. Wir können die obige Gleichung als Einführung verallgemeinerter Kräfte verstehen, die die Zwangsbedingungen realisieren.

Beispiel: Wir betrachten wiederum ein Teilchen mit der Masse m auf einer Halbkugel im Schwerfeld g .

Es gilt:

$$L = T - U = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz ,$$

$$y(t) = 0 \quad \text{und} \quad \sqrt{x^2 + z^2} = a .$$

Mit $r^2 = x^2 + z^2$ und $\frac{x}{z} = \cos(\theta)$ ergibt sich:

$$ma\dot{\theta}^2 - mg \cos(\theta) + \lambda = 0 \quad \text{und} \quad Ma^2\ddot{\theta} + mga \sin(\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = -\frac{2g}{a} \cos(\theta) + \frac{2g}{a} \quad \text{und} \quad \lambda = mg(3 \cos(\theta) - 2) .$$

λ ist die Stärke der Zwangskraft. Für $\lambda = 0$ verlässt das Teilchen die Sphäre bei $\theta = \cos^{-1}(\frac{2}{3})$.

2.3 Symmetrien und Erhaltungsgrößen

Die Symmetrien und Erhaltungsgrößen eines Problems vereinfachen einerseits die Lösung der Bewegungsgleichung, liefern aber gleichzeitig wichtige Informationen über das System.

In vielen Systemen gelten Gleichungen der Form:

$$f(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) = \text{const.}$$

Dies sind Differentialgleichungen erster Ordnung für die Koordinaten und Geschwindigkeiten. Die Gleichungen geben wichtige physikalische Informationen über die mechanischen Systeme.

Beispiel: System aus N Massenpunkten in einem Potential, das nur von den Koordinaten $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ abhängt:

$$\rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \underbrace{\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i}}_{=0} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = m_i \dot{x}_i = p_{i_x}$$

Diese Beziehung zwischen Lagrange-Funktion und Impuls kann für generalisierte Koordinaten verallgemeinert werden.

Dazu führen wir den **kanonischen Impuls**

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (21)$$

ein.

Bemerkung:

p_j ist für generalisierte Koordinaten *nicht* automatisch identisch mit dem Impuls des Teilchens. Dies gilt insbesondere für geschwindigkeitsabhängige Potentiale.

Das Konzept der kanonischen Impulse erlaubt die einfache Identifikation von Erhaltungsgrößen:

Wenn die Lagrangefunktion nicht von q_j (aber von \dot{q}_j) abhängt, dann nennt man die Koordinate q_j **zyklisch**. In diesem Fall gilt:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0 = \frac{d}{dt} p_j .$$

Damit ist der zu einer zyklischen Koordinate konjugierte Impuls erhalten, also:

$$p_j = \text{const.}$$

Beispiel: Wir betrachten ein Teilchen im Zentralpotential $V(x)$, sodass der Drehimpuls erhalten ist. Daher verläuft die Bewegung in der Ebene. In Polarkoordinaten gilt:

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\varphi) \\ \rightarrow \dot{x}^2 &= (\dot{r} \cos(\varphi) - r \sin(\varphi) \dot{\varphi})^2 \\ &= \dot{r}^2 \cos^2(\varphi) - 2r\dot{r} \sin(\varphi) \cos(\varphi) \dot{\varphi} + r^2 \sin^2(\varphi) \dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= r \sin(\varphi) \\ \rightarrow \dot{y}^2 &= (\dot{r} \sin(\varphi) + r \cos(\varphi) \dot{\varphi})^2 \\ &= \dot{r}^2 \sin^2(\varphi) + 2r\dot{r} \sin(\varphi) \cos(\varphi) \dot{\varphi} + r^2 \cos^2(\varphi) \dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$

$$\rightarrow L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)$$

φ ist eine zyklische Koordinate $\rightarrow p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}$ ist eine Erhaltungsgröße.

Wenn ein mechanisches System unter der Verschiebung einer Koordinate q_j invariant ist, kann diese Koordinate nicht in der Lagrangefunktion auftreten und ist daher *zyklisch*. Damit ist p_j eine Erhaltungsgröße. In dieser Weise liefern Symmetrien zyklische Koordinaten und somit die Erhaltung der entsprechenden Impulse.

2.3.1 Das Noether-Theorem

Wir hatten gesehen, dass Koordinaten, deren Verschiebung

$$q_i \rightarrow q'_i = q_i + a$$

die Lagrangefunktion invariant lassen, zyklisch sind und die entsprechenden kanonischen Impulse Erhaltungsgrößen sind.

Nun: allgemeiner Zusammenhang zwischen Erhaltungsgrößen und Transformationen. Wir betrachten die Koordinatentransformation:

$$q_i \rightarrow q'_i = q'_i(q_1, \dots, q_n, t, \alpha) .$$

die invertierbar

$$q_i = q_i(q'_1, \dots, q'_n, t, \alpha) = q_i(\mathbf{q}', t, \alpha)$$

und in α stetig differenzierbar sein muss.

Es gilt ferner:

$$q'_i(q_1, \dots, q_n, t, \alpha = 0) = q_i , \quad i = 1, \dots, n.$$

Beispiele:

- Translation: $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \alpha \mathbf{a}$
- Rotation um die z-Achse mit Drehwinkel α :

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \cos(\alpha) - y \sin(\alpha) \\ x \sin(\alpha) + y \cos(\alpha) \\ z \end{pmatrix}$$

Die Lagrangefunktion in den neuen Koordinaten q'_i lautet:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = L\left(\mathbf{q}(\mathbf{q}', t, \alpha), \frac{d}{dt}\mathbf{q}(\mathbf{q}', t, \alpha), t\right) := L'(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t, \alpha) .$$

Wir betrachten nun die Abhängigkeit von L' vom Parameter α :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L'}{\partial \alpha} &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial q_k(\mathbf{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k(\mathbf{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha} \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \frac{\partial q_k(\mathbf{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial q_k(\mathbf{q}', t, \alpha)}{\alpha} \right) \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left[\sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial q_k(\mathbf{q}', t, \alpha)}{\alpha} \right] \end{aligned}$$

Dies gilt für beliebige Werte von α und insbesondere auch für $\alpha = 0$:

$$\rightarrow \left[\frac{\partial L'}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} = \frac{d}{dt} \left[\sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \left[\frac{\partial q_k(\mathbf{q}', t, \alpha)}{\alpha} \right]_{\alpha=0} \right] .$$

Wir betrachten nun solche Transformationen, die die Lagrangefunktion invariant lassen, für die also gilt:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = L'(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t, \alpha) \stackrel{\text{Invarianz}}{=} L(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t) .$$

Die Invarianz impliziert, dass die neue Lagrangefunktion nicht von α abhängt, also:

$$\left[\frac{\partial L'}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} = 0 . \quad (22)$$

Diese Eigenschaft führt auf das **Noether-Theorem**.

Die Funktion $I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ mit:

$$I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \left[\frac{\partial q_k(\mathbf{q}', t, \alpha)}{\alpha} \right]_{\alpha=0}$$

ist eine Erhaltungsgröße, wenn die Lagrangefunktion unter der kontinuierlichen, stetig differenzierbaren Koordinatentransformation invariant ist. Das bedeutet insbesondere, dass zu jeder Transformation, die die Lagrangefunktion nicht ändert, eine Erhaltungsgröße gehört.

Bemerkung:

Die Erhaltung der kanonischen Impulse zu zyklischen Koordinaten ist ein Spezialfall des Noether-Theorems.

Beispiel: $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - V(x^2 + y^2, z)$

ist invariant unter Rotation um die z-Achse.

In Zylinderkoordinaten lautet die Lagrangefunktion:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - V(r^2, z) .$$

L ist invariant gegenüber der Transformation $\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi + \alpha$.

Damit ist

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \left[\frac{\partial(\varphi' - \alpha)}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} = -mr^2 \dot{\varphi} = -L_z$$

eine Erhaltungsgröße.

Man erhält auch dann noch eine Erhaltungsgröße, wenn gilt:

$$L'(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t, \alpha) = L(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t) + \frac{d}{dt} F(\mathbf{q}', t, \alpha) ,$$

wobei F eine beliebige Funktion der Variablen \mathbf{q}', t, α ist.

L ist dann **symmetrisch** unter der Transformation. Dann gilt:

$$\left[\frac{\partial L'(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t, \alpha)}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} = \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial F(\mathbf{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} .$$

Die Funktion

$$J(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \left[\frac{\partial q_k(\mathbf{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} - \left[\frac{\partial F(\mathbf{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0}$$

ist dann eine Erhaltungsgröße.

Die Lagrangefunktion besitzt die Eigenschaft der **Eichinvarianz**, das heißt die beiden Lagrangefunktionen:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad \text{und} \quad \hat{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \frac{d}{dt} F(\mathbf{q}, t)$$

besitzen für dieselben q, t dieselben Bewegungsgleichungen. Transformationen, die die Lagrangefunktion bis auf eine Umeichung invariant lassen, also:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \rightarrow L(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t) + \frac{d}{dt}F(\mathbf{q}', t, \alpha)$$

heißen **Symmetrietransformationen**.

2.3.2 Energieerhaltungssatz

Wir betrachten die Transformation der Zeit $t \rightarrow t' = t + \alpha$ und skleronome Zwangsbedingungen. Es gelte:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t + \alpha) \quad \text{mit} \quad \alpha = \text{const.}$$

Damit muss $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ gelten und

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) \\ \Rightarrow H &:= \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L = \text{const.} \end{aligned}$$

Für Systeme mit Potentialkräften $V = V(q)$ gilt:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \quad (\text{skleronome Zwangsbedingungen}) .$$

Für ruhende Bezugssysteme erhält man dann:

$$H = 2T - L = T + V = E . \quad (23)$$

Damit ergibt sich:

- Mit H haben wir die sogenannte **Hamiltonfunktion** eingeführt. Sie ist eine Erhaltungsgröße, wenn L nicht explizit von der Zeit abhängt.
- Für skleronome, holonome Zwangsbedingungen, konservative Kräfte und ruhende Bezugssysteme entspricht H der Gesamtenergie.

3 Die Hamiltonschen Gleichungen

Im Rahmen der Energieerhaltung hatten wir bereits die Hamiltonfunktion eingeführt. Sie ist im Gegensatz zur Lagrangefunktion eine Funktion der generalisierten Koordinaten q_k und Impulse $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$.

Der Übergang von der Lagrange- zur Hamiltonfunktion entspricht einem Übergang von den Variablen $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ zu den Variablen $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$. Ein solcher Übergang wird durch eine sogenannte **Legendre-Transformation** beschrieben, die wir nun kurz diskutieren möchten.

3.1 Legendre-Transformation

Zur Einführung in die Methode der Legendre-Transformation betrachten wir zunächst den Fall einer Variablen:

Ziel der Legendre-Transformation ist es, die Funktion $f(x)$ eindeutig in eine Funktion $(\mathcal{L}f)(z)$ zu überführen, die von der Variablen $z = \frac{df}{dx}$ abhängt.

Es sei $f(x)$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion (C^2 -Funktion). Weiterhin sei $y = f(x)$ und $\frac{d^2f}{dx^2} \neq 0$. Damit ist die Funktion $z(x)$ umkehrbar; es existiert also $x = g(z)$. In diesem Fall existiert auch die Legendre-Transformierte $(\mathcal{L}f)(x)$, die durch:

$$(\mathcal{L}f)(x) := x \frac{df}{dx} - f(x) = g(z)z - f(g(z)) \equiv (\mathcal{L}f)(z)$$

gegeben ist.

Wenn wir die Legendre-Transformation auf $(\mathcal{L}f)(z)$ anwenden, erhalten wir mit:

$$\frac{d}{dz}(\mathcal{L}f)(z) = g(z) + z \frac{dg(z)}{dz} - \underbrace{\frac{df}{dg}}_{=\frac{df}{dx}=z} \frac{dg}{dz} = g(z) = x$$

und:

$$\frac{d^2}{dz^2}(\mathcal{L}f)(z) = \frac{d}{dz}x = \left(\frac{dz}{dx}\right)^{-1} = \frac{1}{d^2y/dx^2} \neq 0$$

die Legendre-Transformation von $(\mathcal{L}f)(z) =: \phi(z) = xz - f(x)$:

$$\mathcal{L}(\mathcal{L}f)(z) = (\mathcal{L}\phi)(z) = z \frac{d\phi}{dz} - \phi(z) = zx - xz + f(x) = f(x) .$$

Damit ist für $\frac{d^2f}{dx^2} \neq 0$ die Legendre-Transformation eindeutig umkehrbar.

Beispiel: Wir betrachten $f(v) = \frac{1}{2}mv^2$
 $\rightarrow f''(v) = m \neq 0$ und $z = mv = p$. Weiterhin ist $v = g(z) = \frac{z}{m}$.
 Die Legendre-Transformation lautet dann:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}f)(v) &= g(z)z - \frac{1}{2}m \left(\frac{z}{m}\right)^2 = \frac{z^2}{m} - \frac{1}{2} \frac{z^2}{m} \\ &= \frac{p^2}{2m} = (\mathcal{L}f)(p) . \end{aligned}$$

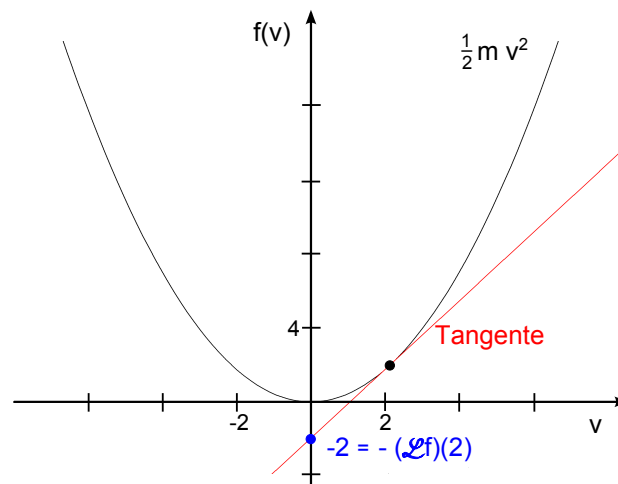


Abbildung 7: Geometrische Interpretation der Legendre-Transformation für den Fall $m = 1$.

Man kann die Legendre-Transformation leicht auf mehrere Variablen verallgemeinern:

Es sei $F(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_n)$ eine in allen Variablen x_i zweimal stetig differenzierbare Funktion und

$$\det \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right) \neq 0 .$$

Dann sind die Gleichungen:

$$y_k = \frac{\partial F}{\partial x_k} , \quad \text{mit} \quad k = 1, \dots, m$$

lokal eindeutig auflösbar, so dass :

$$x_i = \varphi_i(y_1, \dots, y_m; u_1, \dots, u_m) .$$

Die Legendre-Transformation lautet dann:

$$G(y_1, \dots, y_m; u_1, \dots, u_m) = (\mathcal{L}F) = \sum_{k=1}^m y_k \varphi_k - F .$$

Es gilt:

$$\frac{\partial G}{\partial y_k} = \varphi_k , \quad \frac{\partial G}{\partial u_i} = -\frac{\partial F}{\partial u_i} \quad \text{und} \quad \det \left(\frac{\partial^2 G}{\partial y_k \partial y_l} \right) \cdot \det \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right) = 1 .$$

3.2 Hamiltonfunktion

Wir wollen nun die Legendre-Transformation auf die Lagrangefunktion anwenden.

Die Hamiltonfunktion für ein System mit $n = 3N - k$ Freiheitsgraden (wobei k die Anzahl der holonomen Zwangsbedingungen angibt) lautet:

$$H(q, p, t) := \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}(p), t) , \quad (24)$$

wobei:

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_l} \right) \neq 0 \quad \text{und} \quad p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} .$$

Aus der Diskussion der Legendre-Transformation ergibt sich sofort:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad \left(\text{analog zu } x = \frac{d(\mathcal{L}f)(z)}{dz} \right)$$

$$\det \left(\frac{\partial H}{\partial p_j \partial p_i} \right) \neq 0 , \quad \frac{\partial H}{\partial q_k} = -\frac{\partial L}{\partial q_k} = -\dot{p}_k .$$

Offensichtlich gilt auch:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} .$$

Wir haben damit einen neuen Satz von Bewegungsgleichungen erhalten:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{und} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} , \quad i = 1, \dots, n \quad (25)$$

die sogenannten **Hamiltonschen Gleichungen**.

Die Hamiltonschen Gleichungen sind $2n$ Differentialgleichungen 1. Ordnung und zu den Lagrangegleichungen äquivalent. Sie werden auch **kanonische Gleichungen** genannt.

Bemerkungen:

- Die Hamiltonfunktion hängt nur von den Koordinaten, Impulsen und der Zeit ab. Sie hängt dagegen nicht von den Geschwindigkeiten ab, wie man leicht am totalen Differential von H verifizieren kann:

$$\begin{aligned} dH &= \sum_{i=1}^n \left(\dot{q}_i dp_i + p_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{p_i} d\dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt . \end{aligned}$$

Zur Aufstellung der gültigen Bewegungsgleichungen ist es daher wichtig *alle* Geschwindigkeiten \dot{q}_i durch die kanonischen Impulse zu ersetzen.

- Für skleronome, holonome Zwangsbedingungen und Potentialkräfte gilt in Inertialsystemen:

$$H = T + V = \text{kinetische Energie} + \text{potentielle Energie} = E .$$

Dies gilt jedoch nicht allgemein. Es ist sogar möglich, dass $\frac{dH}{dt} = 0$ gilt und H trotzdem *nicht* mit der Gesamtenergie identisch ist.

- H ist genau dann eine Erhaltungsgröße, wenn H nicht *explizit* von der Zeit abhängt:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = 0 . \end{aligned}$$

Beispiel: Gekoppelte Oszillatoren

Es treten keine Zwangsbedingungen auf, so dass $H = E = T + V$ und damit:

$$H = \frac{1}{2m_1} (p_1^2 + p_3^2) + \frac{1}{2m_2} p_2^2 + \frac{k}{2} ((q_1 + q_2)^2 + (q_3 + q_2)^2) .$$

Dies führt auf die Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{m_1} , \\ \dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial q_1} = -k(q_1 - q_2) = m_1 \ddot{q}_1 . \end{aligned}$$

und entsprechend für die übrigen Koordinaten:

$$\begin{aligned}\dot{q}_2 &= \frac{p_2}{m_2}, \\ \dot{p}_2 &= -k[(q_2 - q_1) + (q_2 - q_3)] \\ \rightarrow \ddot{q}_2 &= -\frac{k}{m_2}(2q_2 - q_1 - q_3) \quad \text{und} \\ \ddot{q}_3 &= -k(q_3 - q_2) .\end{aligned}$$

Zusammenfassung:

Hamilton-Funktion: $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$

Bewegungsgleichungen: $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$

Merkhilfe:

Gleichung gilt offenbar für die Form $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ mit $F = -\frac{\partial V}{\partial q}$.

Beispiel: Übergang von der Lagrange-Funktion zur Hamilton-Funktion für ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld.

Die Lagrange-Funktion für ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld lautet ($\mathbf{q} = \mathbf{r}$):

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - q \left(\phi - \frac{1}{c} \mathbf{A} \dot{\mathbf{r}} \right)$$

mit dem Coulombpotential ϕ , der Ladung q und dem Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$.

1. *Schritt:* Berechnung der kanonischen Impulse

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = m \dot{r}_i + \frac{q}{c} A_i$$

bzw. $\mathbf{p} = m \dot{\mathbf{r}} + \frac{q}{c} \mathbf{A}$

2. *Schritt:* Berechnung der Hamilton-Funktion

$$\begin{aligned}H &= \dot{\mathbf{r}} \mathbf{p} - L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \\ &= m \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{q}{c} \dot{\mathbf{r}} \mathbf{A} - \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{q}{c} \mathbf{A} \dot{\mathbf{r}} + q\phi \\ &= \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + q\phi\end{aligned}$$

3. Schritt: Ersetzen der Variable $\dot{\mathbf{r}}$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \frac{1}{m} \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \\ \rightarrow H &= \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 + q\phi\end{aligned}$$

Damit haben wir, wie gefordert, die Hamiltonfunktion als Funktion der Variablen \mathbf{p} und \mathbf{r} ausgedrückt (die Ortsabhängigkeit ergibt sich aus den Potentialen ϕ , \mathbf{A}).

Wir wollen nun noch die Bewegungsgleichungen für den Fall herleiten, dass

$$\phi = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = B\mathbf{e}_z$$

gilt. Das geladene Teilchen bewegt sich also in einem homogenen Magnetfeld, das in z -Richtung ausgerichtet ist.

Eine Wahl für \mathbf{A} , die auf $\nabla \times \mathbf{A} = B\mathbf{e}_z$ führt ist:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ xB \\ 0 \end{pmatrix} .$$

\mathbf{A} ist wegen:

$$\nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla\psi) = \nabla \times \mathbf{A}$$

nicht eindeutig.

Wenn wir nun \mathbf{A} in H einsetzen, ergibt sich:

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_z^2) + \frac{1}{2m} \left(p_y - \frac{q}{c} Bx \right)^2 .$$

Für die kanonischen Gleichungen erhalten wir:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} , \\ \dot{y} &= \frac{1}{m} \left(p_y - \frac{q}{c} Bx \right) , \\ \dot{z} &= \frac{p_z}{m} \\ \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{m} \left(p_y - \frac{q}{c} Bx \right) \frac{q}{c} B , \\ \dot{p}_y &= \dot{p}_z = 0 .\end{aligned}$$

Mit der Zyklotronfrequenz:

$$\omega = \frac{qB}{mc}$$

ergeben sich dann die *Bewegungsgleichungen*:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{1}{m} \dot{p}_x = \frac{\omega}{m} (p_y - \omega m x) = \frac{\omega}{m} (m \dot{y} + \omega m x - \omega m x) = \omega \dot{y} , \\ \ddot{y} &= \frac{1}{m} (\dot{p}_y - \omega m \dot{x}) = -\omega \dot{x} , \\ \ddot{z} &= \frac{\dot{p}_z}{m} = 0 .\end{aligned}$$

Die Lösung entspricht einer Schraubenlinie mit:

$$\begin{aligned}x(t) &= r \cos(\omega t + \varphi) + x_0 , \\ y(t) &= r \sin(\omega t + \varphi) + y_0 , \\ z(t) &= \dot{z} t + z_0 .\end{aligned}$$

Wenn wir die Bewegungsgleichungen aus der Lagrange-Funktion:

$$L = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{q}{c} B x \dot{y}$$

bestimmen wollen, müssen wir die Euler-Lagrange-Gleichungen heranziehen. Es gilt:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= \frac{d}{dt} m \dot{x} = m \ddot{x} , & \frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{qB}{c} \dot{y} = m \omega \dot{y} \\ \rightarrow \ddot{x} &= \omega \dot{y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= \frac{d}{dt} (m \dot{y} + \omega m x) = m (\ddot{y} + \omega \dot{x}) , & \frac{\partial L}{\partial y} &= 0 \\ \rightarrow \ddot{y} &= -\omega \dot{x}\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = m \ddot{z} = 0 .$$

Wie erwartet führen beide Formalismen auf identische Bewegungsgleichungen.

3.3 Hamiltonsche Gleichungen und Hamiltonsches Prinzip

Das Wirkungsintegral S , das wir minimieren, hat die Form:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt .$$

Das Hamiltonsche Prinzip besagt, dass diejenigen Trajektorien $\mathbf{q}(t)$ zwischen $\mathbf{q}(t_1)$ und $\mathbf{q}(t_2)$ realisiert werden, für die S extremal wird.

Wir fassen L nun als Funktion von $\mathbf{q}, \mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}}, t$ auf und drücken L durch H aus. Dann gilt:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{p}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) dt .$$

Wir halten die p_i und q_i an den Grenzen fest:

$$\rightarrow \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left[\dot{q}_i \delta p_i + p_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right] dt = 0 .$$

Es gilt:

$$\int_{t_1}^{t_2} p_i \delta \dot{q}_i dt = \underbrace{[p_i \delta q_i]_{t_1}^{t_2}}_{=0, \text{ da } \delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_i \delta q_i dt .$$

Damit erhalten wir:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^n \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right] dt = 0 .$$

Woraus wegen der Unabhängigkeit der kanonischen Variablen die Hamiltonschen Gleichungen:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{und} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

folgen.

3.4 Die Poisson-Klammern

Eine physikalische Messgröße oder Observable sei eine differenzierbare Funktion $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ der Variablen $\mathbf{q}, \mathbf{p}, t$.

Die zeitliche Änderung einer solchen Observablen lautet:

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t} .$$

Die zeitlichen Ableitungen \dot{q}_i und \dot{p}_i kann man mit Hilfe der kanonischen Gleichungen ersetzen. Damit ergibt sich:

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} .$$

Zur Ersetzung der Reihensumme führen wir nun die sogenannte **Poisson-Klammer** ein:

$$[f, g]_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) , \quad (26)$$

wobei $f = f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ und $g = g(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$.

Mit der Poisson-Klammer vereinfacht sich die Darstellung von $\frac{df}{dt}$ erheblich:

$$\frac{df}{dt} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t} . \quad (27)$$

Nicht explizit zeitabhängige Observablen f sind offenbar dann *Erhaltungsgrößen*, falls

$$[f, H] = 0 \quad (28)$$

gilt.

Die kanonischen Gleichungen lassen sich ebenfalls durch Poisson-Klammern ausdrücken:

$$\text{Für } f = q_i \text{ gilt:} \quad [q_i, H] = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad \rightarrow \quad \dot{q}_i = [q_i, H] . \quad (29)$$

$$\text{Für } f = p_i \text{ gilt:} \quad [p_i, H] = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \dot{p}_i \quad \rightarrow \quad \dot{p}_i = [p_i, H] . \quad (30)$$

Wie man aus der Definition der Poisson-Klammer direkt sieht.

Eigenschaften der Poisson-Klammer:

1. Linearität:

$$[c_1 f + c_2 g, h] = c_1 [f, h] + c_2 [g, h]$$

2. Antisymmetrie:

$$[f, g] = -[g, f]$$

3. Existenz eines Nullelements:

$$[c, f] = 0 \quad \text{mit} \quad c = \text{const.}$$

4. Produktregel:

$$[fg, h] = f [g, h] + g [f, h]$$

5. Jacobi-Identität:

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0$$

6. Fundamentale Poissonklammern:

$$[q_i, q_j] = 0 \quad ; \quad [q_i, p_j] = \delta_{ij}$$

Bemerkungen:

- Die Kommutatoren, das heißt die quantenmechanische Verallgemeinerung der Poisson-Klammern, sind in der Quantenmechanik von entscheidender Bedeutung.
Auch Kommutatoren besitzen die Eigenschaften 1. - 6.
- Die Poisson-Klammer aus zwei Erhaltungsgrößen f, g ist wieder eine Erhaltungsgröße (**Poissonsches Theorem**).

Beweis: Es sei $w = [f, g]$, dann gilt:

$$\frac{d}{dt}w = \frac{\partial}{\partial t}w + [w, H] .$$

Den Ausdruck $[w, H] = [[f, g], H]$ kann man mit der Jacobi-Identität zu:

$$[w, H] = - [[g, H], f] - [[H, f], g]$$

umformen, so dass:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g \right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t} \right] - [[g, H], f] - [[H, f], g] \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial t} - [H, f], g \right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t} + [g, H] \right] = 0 , \end{aligned}$$

da:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] = \frac{df}{dt} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial g}{\partial t} + [g, H] = \frac{dg}{dt} = 0 .$$

3.5 Kanonische Transformation

Die Wahl geeigneter Koordinaten ist ein wichtiger Beitrag zur Lösung der klassischen Bewegungsgleichungen. Von besonderem Interesse sind solche verallgemeinerten Koordinaten \mathbf{Q} , die die Zahl der zyklischen Koordinaten optimiert, da für eine zyklische Koordinate Q_k gilt:

$$\dot{P}_k = -\frac{\partial H}{\partial Q_k} = 0 ,$$

so dass $P_k = \alpha_k = \text{const.}$

Im Idealfall sind alle Koordinaten zyklisch, so dass:

$$\dot{P}_i = 0 \quad \text{bzw.} \quad P_i = \alpha_i = \text{const.} , \quad \forall i = 1, \dots, n$$

gilt.

Wir betrachten hier zunächst die sogenannten **Punkttransformationen**, die die Form:

$$q_i \quad \rightarrow \quad Q_i(q_1, \dots, q_n, t) = Q_i(\mathbf{q}, t) , \quad i = 1, \dots, n$$

besitzen.

In den neuen Koordinaten lautet die Lagrangefunktion:

$$\tilde{L}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) = L \left[q(\mathbf{Q}, t), \dot{q}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t), t \right] .$$

Falls die Transformation $q_i \rightarrow Q_i(\mathbf{q}, t)$ ein Diffeomorphismus (eine umkehrbar eindeutige Abbildung f , für die f und f^{-1} differenzierbar sind), ist bleiben die Lagrange-Gleichungen unverändert, das heißt es gilt:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial L'}{\partial Q_i} = 0 .$$

Bemerkung:

Die resultierenden Bewegungsgleichungen haben natürlich eine andere Gestalt.

Die Impulse und damit die Hamiltonfunktion ändern sich ebenfalls unter Punkttransformationen:

$$p_i \quad \rightarrow \quad P_i = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{j=1}^n \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{=p_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} .$$

Mit:

$$\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} \dot{Q}_k + \frac{\partial q_j}{\partial t} ,$$

folgt sofort, dass:

$$\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} = \frac{\partial q_j}{\partial Q_i}$$

ist und damit insgesamt:

$$P_i = \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} , \quad i = 1, \dots, n .$$

Die Hamiltonfunktion transformiert sich dann wie:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \rightarrow \tilde{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = \sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i - \tilde{L} .$$

Auch die kanonischen Gleichungen sind unter Punkttransformationen invariant, es gilt also:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_i} \quad \text{und} \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_i} .$$

Beispiel: Bewegung eines Partikels in der Ebene.

Die Lagrangefunktion in Polarkoordinaten lautet:

$$L(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) .$$

Wir führen nun die Punkttransformation:

$$R = r \quad \text{und} \quad \phi = \varphi + \omega t$$

durch.

Damit ergibt sich:

$$\dot{r}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) = \dot{R} \quad \text{und} \quad \dot{\varphi}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) = \dot{\phi} - \omega$$

und somit für \tilde{L} :

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= \frac{m}{2} \left(\dot{R}^2 + R^2 (\dot{\phi} - \omega)^2 \right) \\ \rightarrow P_R &= \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{R}} = m \dot{R} \quad \text{und} \quad P_\phi = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\phi}} = m R^2 (\dot{\phi} - \omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow \quad \tilde{H} &= m\dot{R}^2 + mR^2 (\dot{\phi} - \omega) \dot{\phi} - \frac{m}{2} \left(\dot{R}^2 + R^2 (\dot{\phi} - \omega)^2 \right) \\
&= \frac{P_R^2}{2m} + P_\phi \left(\dot{\phi} - \frac{1}{2} (\dot{\phi} - \omega) \right) \\
&= \frac{P_R^2}{2m} + \frac{P_\phi^2}{2mR^2} + P_\phi \omega
\end{aligned}$$

Wichtig:

\tilde{H} entspricht nicht einfach dem Einsetzen der neuen Variablen in die Hamiltonfunktion, wie man leicht nachrechnen kann:

Offenbar lautet die Hamiltonfunktion in Zylinderkoordinaten mit $p_r = m\dot{r}$ und $p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}$:

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2}.$$

Mit den Ersetzungen $r = R$, $\dot{r} = \dot{R}$ und $\dot{\varphi} = \dot{\phi} - \omega$ erhält man:

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \frac{P_R^2}{2m} + \frac{m^2 R^4 (\dot{\phi} - \omega)^2}{2mR^2} \\
&= \frac{P_R^2}{2m} + \frac{P_\phi^2}{2mR^2} \neq \tilde{H}.
\end{aligned}$$

3.5.1 Allgemeine kanonische Transformationen

Wir hatten am Beispiel von Punkttransformationen gesehen, dass die kanonischen Gleichungen beim Übergang von $q_i \rightarrow Q_i(\mathbf{q}, t)$ invariant bleiben. In diesem Abschnitt soll die allgemeine Struktur von kanonischen Transformationen, also diffeomorphen Transformationen der Variablen \mathbf{q}, \mathbf{p} , die die kanonischen Gleichungen invariant lassen, diskutiert werden.

Dazu müssen wir fordern, dass sowohl in den alten Koordinaten \mathbf{q}, \mathbf{p} als auch in den neuen Koordinaten \mathbf{Q}, \mathbf{P} das Extremalprinzip erfüllt ist.

Nutzen wir noch die Eichinvarianz der Lagrangefunktion aus, so ergibt sich für die Hamiltonfunktion die Bedingung:

$$\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^n \dot{Q}_i P_i - \tilde{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) + \frac{d}{dt} F \quad (31)$$

Die Funktion F fassen wir nun als **Erzeugende** der kanonischen Transformation auf:

Durch die Wahl der Erzeugendenfunktion wird die kanonische Transformation festgelegt.

$$1. F = F(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) = \phi(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial\phi}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial\phi}{\partial Q_j} \dot{Q}_j \right]$$

Damit ist die Gleichung (31) erfüllt, falls:

$$p_j = \frac{\partial\phi}{\partial q_j} \quad \text{und} \quad -P_j = \frac{\partial\phi}{\partial Q_j} \quad \text{und} \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial\phi}{\partial t} .$$

Bemerkung:

Die Gleichungen für die p_j und P_j sind auflösbar, falls:

$$\det \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial q_i \partial q_j} \right) \neq 0 \quad \text{und} \quad \det \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial Q_k \partial Q_j} \right) .$$

$$2. F(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = \rho(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) - \sum_{k=1}^n Q_k(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) P_k$$

$$\text{mit } \frac{\partial\rho}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial\rho}{\partial P_k} = Q_k \quad \text{und} \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + H = \tilde{H} .$$

$$3. F(\mathbf{Q}, \mathbf{p}, t) = U(\mathbf{Q}, \mathbf{p}, t) + \sum_{k=1}^n q_k(\mathbf{Q}, \mathbf{p}, t) p_k$$

$$\text{mit } q_k = -\frac{\partial U}{\partial p_k}, \quad P_k = -\frac{\partial U}{\partial Q_k} \quad \text{und} \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial U}{\partial t} .$$

$$4. F(\mathbf{P}, \mathbf{p}, t) = V(\mathbf{P}, \mathbf{p}, t) - \sum_{k=1}^n Q_k(\mathbf{q}(\mathbf{P}, \mathbf{p}, t), \mathbf{P}, t) P_k + \sum_{k=1}^n q_k(\mathbf{P}, \mathbf{p}, t) ,$$

$$\text{so dass } q_k = -\frac{\partial V}{\partial p_k}, \quad Q_k = \frac{\partial V}{\partial P_k} \quad \text{und} \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial V}{\partial t} .$$

Beispiel: Harmonischer Oszillator

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$

$$\text{mit der Wahl für } \phi = \phi(q, Q) = \frac{1}{2} m \omega q^2 \cot(Q)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad p &= \frac{\partial\phi}{\partial q} = m\omega q \cot(Q) , \\ P &= -\frac{\partial\phi}{\partial Q} = \frac{1}{2} m\omega q^2 \frac{1}{\sin^2(Q)} , \\ \tilde{H} &= H + \frac{\partial\phi}{\partial t} = H \end{aligned}$$

mit $q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin(Q)$ und $p = \sqrt{2Pm\omega} \cos(Q)$ ergibt sich:

$$H = \frac{2Pm\omega}{2m} \cos^2(Q) + \frac{1}{2} m\omega^2 \frac{2P}{m\omega} \sin^2(Q) = \omega P .$$

Offenbar ist Q zyklisch und damit:

$$\begin{aligned}\dot{P} &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = 0 \quad \rightarrow \quad P = \alpha = \text{const.} \\ \dot{Q} &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = \omega \quad \rightarrow \quad Q = \omega t + \beta \\ \rightarrow \quad q(t) &= \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega}} \sin(\omega t + \beta) , \\ p(t) &= \sqrt{2m\omega\alpha} \cos(\omega t + \beta)\end{aligned}$$

Die Bewegung des Oszillators kann man in einem Phasenportrait veranschaulichen. Dabei werden die Trajektorien im $2n$ -dimensionalen Phasenraum abgebildet. Für $m = \omega = \alpha = 1$ ergibt sich Abbildung 8.

Die Kurven ergeben sich aus der Eliminierung von t . Beachten Sie, dass die Schnittstellen mit der x -Achse die Umkehrpunkte des Oszillators sind.

Das schraffierte Volumen, das einem Ensemble von Anfangsbedingungen entspricht, bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit um den Ursprung.

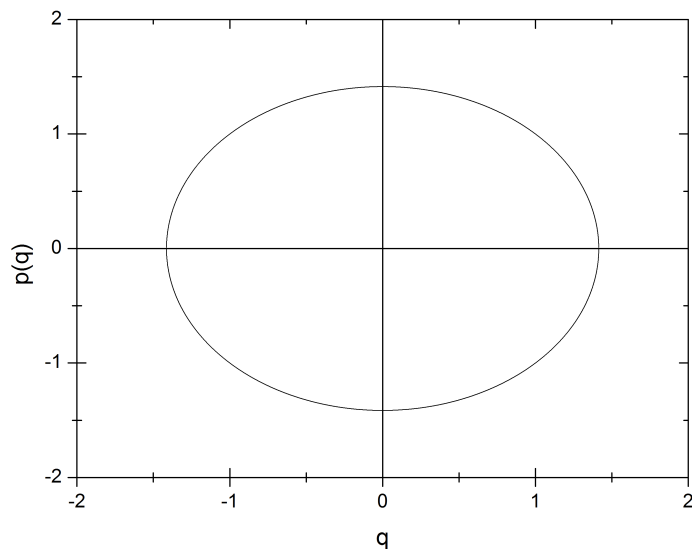


Abbildung 8: Phasenraumportrait des harmonischen Oszillators.

Man kann die kanonischen Gleichungen auch in kompakter Notation schreiben. Mit:

$$\mathbf{x} := (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)^t, \\ \mathbf{H}_{,x} := \left(\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial q_n}, \frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n} \right)^t$$

und der Matrix:

$$\underline{\underline{J}} := \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & \mathbb{1}_{n \times n} \\ -\mathbb{1}_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{J}}^{-1} = -\underline{\underline{J}}$$

gilt:

$$\dot{\mathbf{x}} = \underline{\underline{J}} \mathbf{H}_{,x}. \quad (32)$$

Diese Gleichung fasst die kanonischen Gleichungen zusammen.

In ähnlicher Weise lassen sich auch die kanonischen Transformationen umschreiben. Mit:

$$M_{\alpha\beta} := \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\beta}, \quad \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\beta} = (M^{-1})_{\alpha\beta}, \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, 2n) \\ \mathbf{x} := \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} := \begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix}$$

erhalten wir für die kanonischen Transformationen die Identität:

$$\underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{J}} \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{J}}. \quad (33)$$

Die Jacobi-Matrix $\underline{\underline{M}}$ der Transformation ist nichts anderes als die Matrix der zweiten Ableitungen von Erzeugenden kanonischer Transformationen.

$\underline{\underline{J}}$ stellt eine Metrik im Phasenraum dar, die invariant unter kanonischen Transformationen ist.

Die Menge aller Matrizen $\underline{\underline{M}}$, die die Gleichung (33) erfüllen, bilden eine Gruppe, die sogenannte reelle symplektische Gruppe $\mathbb{G} = Sp_{2n}(\mathbb{R})$. (Übung)

Interpretation: Für $n = 1$ gilt:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial q}{\partial P} \\ \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial P} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 U}{\partial Q \partial p} & -\frac{\partial^2 V}{\partial P \partial p} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial Q \partial q} & \frac{\partial^2 \rho}{\partial P \partial q} \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{M}}$ ist also die Matrix der zweiten Ableitungen der Erzeugenden.

3.5.2 Kanonische Invarianten

Die Gruppeneigenschaften der kanonischen Transformation implizieren:

1. Die identische Transformation ist kanonisch.
2. Die Inverse einer kanonischen Transformation ist kanonisch.
3. Eine Transformation, die die Hintereinanderausführung zweier kanonischer Transformationen ist, ist ebenfalls kanonisch (Produktoperation).
4. Die Produktoperation ist assoziativ.

Poissonklammern:

Die Poissonklammer zweier Funktionen u, v :

$$[u, v]_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i}$$

hat eine typische symplektische Struktur, das heißt \mathbf{q} und \mathbf{p} sind miteinander verknüpft. Wir können die Poissonklammer in der Form:

$$[u, v]_{\mathbf{x}} = \left(\frac{\partial u}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial q_n}, \frac{\partial u}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial p_n} \right) \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial q_1} \\ \dots \\ \frac{\partial v}{\partial q_n} \\ \frac{\partial v}{\partial p_1} \\ \dots \\ \frac{\partial v}{\partial p_n} \end{pmatrix}$$

$$=: \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}} \right)^t \underline{\underline{J}} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}}$$

schreiben.

Die fundamentalen Poissonklammern:

$$[q_i, q_k]_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = 0 = [p_i, p_k]_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} \quad \text{und} \quad [q_j, p_k]_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = \delta_{jk}$$

kann man ebenfalls kompakter schreiben:

$$[\mathbf{x}, \mathbf{x}]_{\mathbf{x}} = \underline{\underline{J}} .$$

Wir diskutieren nun, wie sich die fundamentalen Poissonklammern unter kanonischen Transformationen verhalten. Dazu führen wir den Vektor

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix}$$

ein, der die kanonisch transformierten Variablen Q_j, P_k enthält.
Die Poissonklammer lautet dann:

$$[\mathbf{y}, \mathbf{y}]_{\mathbf{x}} = \underbrace{\left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}\right)^t}_{\underline{\underline{M^t}}} \underline{\underline{J}} \underbrace{\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}}_{\underline{\underline{M}}} = \underline{\underline{M^t}} \underline{\underline{J}} \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{J}} .$$

Offensichtlich gilt auch:

$$[\mathbf{y}, \mathbf{y}]_{\mathbf{y}} = \underline{\underline{J}} ,$$

so dass wir die Invarianz der fundamentalen Poissonklammern unter kanonischen Transformationen bestätigt haben.

Man kann in analoger Weise zeigen, dass die Invarianz unter kanonischen Transformationen eine generelle Eigenschaft der Poissonklammern ist.

Beispiel: Wir betrachten die Transformation:

$$Q = q^a \cos(bp) \quad \text{und} \quad P = q^a \sin(bp) .$$

Für welche Werte von a, b ist die Transformation kanonisch?

Wir bestimmen dazu die Poissonklammer:

$$\begin{aligned} [Q, P]_{q,p} &= \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} \\ &= a q^{a-1} \cos(bp) q^a b \cos(bp) + q^a b \sin(bp) a q^{a-1} \sin(bp) \\ &= a b q^{2a-1} \stackrel{!}{=} 1 \\ \rightsquigarrow a &= \frac{1}{2} \quad , \quad b = 2 . \end{aligned}$$

Kanonische Invarianz des Phasenraumvolumens

Das Volumenelement

$$dV_{\mathbf{x}} = dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n$$

transformiert sich in ein Volumenelement in den transformierten Variablen:

$$dV_{\mathbf{y}} = dQ_1 \dots dQ_n dP_1 \dots dP_n .$$

Der Zusammenhang zwischen den Variablen wird durch die Jacobi-Determinante hergestellt. Es gilt dann:

$$dV_{\mathbf{y}} = \|\underline{\underline{M}}\| dV_{\mathbf{x}} .$$

Da für die Matrix $\underline{\underline{M}}$ gilt, dass $\det \underline{\underline{M}} = 1$ ist, bleibt das Volumenelement unter kanonischen Transformationen erhalten.

3.6 Der Satz von Liouville

Wir hatten am Beispiel des harmonischen Oszillators bereits ein Phasenportrait diskutiert. Diese Diskussion wollen wir an dieser Stelle vertiefen.

Die Bewegung eines Teilchens wird durch $2n$ generalisierte Koordinaten beschrieben, die sich als Koordinaten eines $2n$ -dimensionalen Phasenraums auffassen lassen.

Da die Trajektorien durch die Wahl der $2n$ Anfangsbedingungen eindeutig festgelegt sind, können sich die Phasenbahnen nicht schneiden.

Beispiel: Mathematisches Pendel mit

- Der Maximalausschlag ist $\varphi < \pi$
 → periodische Bewegung des Pendels
 Die Gesamtenergie des Systems ist gegeben durch:

$$E = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \cos(\varphi)) \stackrel{\text{Energieerhaltung}}{=} mgl(1 - \cos(\varphi_0)) .$$

Mit dem kanonischen Impuls:

$$p_\varphi = ml^2 \dot{\varphi} = \pm ml \sqrt{2gl} \sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}$$

→ $p_\varphi(\varphi)$ beschreiben Ellipsenbahnen.

- $\varphi_0 = 0$, $\dot{\varphi}(0) = \pm 2 \left(\frac{g}{l}\right)^{1/2}$

$$\rightarrow p_\varphi(\varphi = \pi) = 0 \quad \text{und} \quad p_\varphi = \pm 2ml \sqrt{gl} \cos \frac{\varphi}{2}$$

Der Punkt $\varphi = \pi$ wird nach unendlicher Zeit erreicht.

- Überschlagendes Pendel

$$p_\varphi = \pm ml \sqrt{2gl} \sqrt{\cos \varphi - 1 + \frac{E}{mgl}}$$

Die Statistische Mechanik beschreibt die Eigenschaften von makroskopischen Systemen, die $\mathcal{O}(N^{23})$ Teilchen enthalten. Für solche Systeme ist es weder möglich noch sinnvoll alle Trajektorien anzugeben.

Möglich und sinnvoll ist es aber eine Verteilungsdichte

$$g(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) dV_{\mathbf{x}}$$

einzuführen, die die Anzahl der Systeme eines Ensembles von Teilchen angibt, die sich zur Zeit t im Volumen $dV_{\mathbf{x}}$ befinden. Es sei nun:

$$\mathbb{G} := \int_{\Gamma} \dots \int g(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) dV_{\mathbf{x}}$$

die Anzahl der Systeme im Phasenraum Γ . Damit kann man dann eine Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\varrho(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) := \frac{g(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\mathbb{G}}$$

einführen, so dass $\varrho(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) dV_{\mathbf{x}}$ die Wahrscheinlichkeit angibt, dass ein gegebenes System sich zum Zeitpunkt t im infinitesimalen Volumen $dV_{\mathbf{x}}$ um den Punkt (\mathbf{q}, \mathbf{p}) im Phasenraum befindet.

Für ein gegebenes Volumenelement $dV_{\mathbf{x}}$ um den Punkt $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ gilt:

$$g(\mathbf{x}, t) = \frac{d\mathbb{G}}{dV_{\mathbf{x}}}$$

mit $d\mathbb{G} = \#$ Phasenraumpunkte in $dV_{\mathbf{x}}$.

Das Phasenraumvolumen ist eine kanonische Invariante, das heißt $dV_{\mathbf{x}}$ ist zeitlich konstant. Genauso verhält es sich mit $d\mathbb{G}$, da eine Änderung von \mathbb{G} bedeuten würde, dass sich Phasenraumpunkte aus $dV_{\mathbf{x}}$ entfernen und damit Trajektorien schneiden würden, die entlang der Grenzflächen von $dV_{\mathbf{x}}$ verlaufen.

Damit ist g eine Erhaltungsgröße und es gilt:

$$\frac{dg}{dt} = [g, H] + \frac{\partial g}{\partial t} = 0 .$$

Da auch die Zahl der Systeme erhalten bleibt, gilt analog:

$$\frac{d\varrho}{dt} = [\varrho, H] + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0 \quad (\text{Satz von Liouville}) \quad (34)$$

Bemerkungen:

- Der Satz von Liouville beschreibt den Fluss im *Phasenraum*. Er gilt nicht für generalisierte Koordinaten und Geschwindigkeiten.
- Für die homogene Verteilung $\varrho(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \varrho(t)$ gilt $\frac{\partial \varrho}{\partial q_i} = \frac{\partial \varrho}{\partial p_i} = 0$.
Damit gilt aber wegen des Satzes von Liouville:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0 .$$

Dieses Ergebnis ist für die Statistische Mechanik von essentieller Bedeutung und wurde von Ludwig Boltzmann postuliert:

„Ein isoliertes System im Gleichgewicht befindet sich mit gleicher Wahrscheinlichkeit in jedem seiner Mikrozustände, die dem präparierten Makrozustand genügen.“

Der Begriff „Mikrozustand“ bedeutet, die Kenntnis aller $6N$ Koordinaten des Phasenraums, während der Makrozustand durch makroskopische thermodynamische Variablen wie Entropie, Temperatur, Druck, Volumen, etc. beschrieben wird.

3.7 Infinitesimale kanonische Transformationen

Wir betrachten hier solche Transformationen, die sich stetig in die identische Abbildung überführen lassen.

Die identische Abbildung gehört zur Klasse der kanonischen Transformationen. Es sei:

$$S_E = \sum_{k=1}^n q_k P_k$$

$$\Rightarrow p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k} = P_k \quad , \quad Q_k = \frac{\partial S}{\partial P_k} = q_k \quad , \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t} = H$$

die Erzeugende der identischen Transformation.

Wir betrachten nun die Erzeugende:

$$S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, \varepsilon) = S_E + \varepsilon \sigma(\mathbf{q}, \mathbf{P}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad ,$$

wobei ε ein kontinuierlicher Parameter ist.

Die Funktion:

$$\sigma(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = \left. \frac{\partial S}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$$

bezeichnet man als **Erzeugende der infinitesimalen Transformation**.

Es gilt dann:

$$Q_k = \frac{\partial S}{\partial P_k} = q_k + \varepsilon \frac{\partial \sigma}{\partial P_k} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k} = P_k + \varepsilon \frac{\partial \sigma}{\partial q_k} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Die infinitesimalen Änderungen:

$$\begin{aligned}\delta q_k &= Q_k - q_k = \varepsilon \frac{\partial \sigma(\mathbf{q}, \mathbf{P})}{\partial P_k} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) , \\ \delta p_k &= P_k - p_k = -\varepsilon \frac{\partial \sigma(\mathbf{q}, \mathbf{P})}{\partial q_k} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\end{aligned}$$

kann man mit Hilfe der Poissonklammern bestimmen. Es gilt:

$$\delta q_k = [q_k, \sigma(\mathbf{q}, \mathbf{P})] \varepsilon \quad \text{und} \quad \delta p_k = [P_k, \sigma(\mathbf{q}, \mathbf{P})] \varepsilon .$$

Bemerkung:

Im Rahmen dieses Konzepts kann man auch die kanonischen Gleichungen herleiten, mit $\sigma(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ und $\varepsilon = dt$ gilt:

$$\begin{aligned}dq_k &= [q_k, H] dt & \text{bzw.} & \quad \dot{q}_k = [q_k, H] , \\ dp_k &= [p_k, H] dt & \text{bzw.} & \quad \dot{p}_k = [p_k, H] .\end{aligned}$$

Die Funktion H ist also Erzeugende der infinitesimalen Änderungen von \mathbf{q}, \mathbf{p} im Intervall dt .

3.8 Integrale der Bewegung

Wir betrachten nun die Änderung einer dynamischen Größe oder Observablen $f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ unter einer infinitesimalen Transformation der Form:

$$S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, \varepsilon) = S_E + \varepsilon \sigma(\mathbf{q}, \mathbf{P}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) .$$

Die direkte Rechnung ergibt:

$$\begin{aligned}\delta_\sigma f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial f}{\partial p_k} \delta p_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial \sigma}{\partial P_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial \sigma}{\partial q_k} \right) \varepsilon \\ &= [f, \sigma] \varepsilon\end{aligned}\tag{35}$$

Beispiel: Mit $\sigma(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, $\varepsilon = dt$ und $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ ergibt sich $\frac{df}{dt} = [f, H]$.

Interessant ist die Umkehrung dieser Beziehung:

Wie ändert sich H unter einer infinitesimalen Transformation, die durch $f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ erzeugt wird. Hier können wir wieder die Beziehung (35) ausnutzen, wobei wir die Ersetzungen $\sigma \leftrightarrow f$ und $f \leftrightarrow H$ vornehmen müssen.

Es gilt dann:

$$\delta_f H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = [H, f] \varepsilon .$$

Wenn nun die Transformation $f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ die Hamiltonfunktion H invariant lässt, gilt offensichtlich:

$$[H, f] = 0 = -[f, H] .$$

Damit sind Erzeugende infinitesimaler Transformationen, die die Hamiltonfunktion invariant lassen, Erhaltungsgrößen.

Damit können wir dann auch im Hamilton-Formalismus das **Noether-Theorem** formulieren:

„Zu jeder infinitesimalen Symmetrietransformation der Hamiltonfunktion gehört eine Erhaltungsgröße. Umgekehrt ist jede Erhaltungsgröße Erzeugende einer infinitesimalen Symmetrietransformation.“

Beispiel: Infinitesimale Verschiebung um den Vektor \mathbf{a} mit

$$H = \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{2m} + U(\underline{q}_1, \dots, \underline{q}_N)$$

Hamiltonfunktion des N -Teilchensystems.
 H sei invariant unter der Transformation:

$$S(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_N) = \sum_{i=1}^N \mathbf{q}_i \mathbf{P}_i + \mathbf{a} \sum_{i=1}^N \mathbf{P}_i .$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} Q_k &= \frac{\partial S}{\partial P_k} \quad \rightarrow \quad \underline{Q}_k = \underline{q}_k + \underline{a} \quad \text{und} \\ p_k &= \frac{\partial S}{\partial q_k} \quad \rightarrow \quad \underline{p}_k = \underline{P}_k . \end{aligned}$$

Die Erzeugende der infinitesimalen Transformation ist:

$$\begin{aligned} \sigma &= \left. \frac{\partial S}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=0} = \hat{\mathbf{a}} \cdot \sum_{i=1}^N \mathbf{P}_i , \\ \text{mit } \mathbf{a} &= a \hat{\mathbf{a}} \quad \text{und} \quad |\hat{\mathbf{a}}| = 1 \end{aligned}$$

also die Projektion des Gesamtimpulses auf die Richtung von \mathbf{a} .
 Sie ist wegen der Invarianz von H Erhaltungsgröße.

4 Die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung

Wir haben bereits gesehen, dass die Bewegungsgleichungen trivial lösbar sind, wenn alle Koordinaten des Systems zyklisch sind.

Dies gilt also insbesondere, wenn man eine zeitabhängige kanonische Transformation findet, die auf $\tilde{H} = 0$ führt.

Wir schreiben formal:

$$\{\mathbf{q}, \mathbf{p}, H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)\} \xrightarrow{S^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)} \left\{ \mathbf{Q}, \mathbf{P}, \tilde{H} = H + \frac{\partial S^*}{\partial t} \right\} .$$

$S^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ ist also diejenige Klasse von Erzeugenden, die auf $\tilde{H} = 0$ führt. Wir fordern also explizit:

$$\tilde{H} = H \left(q_i, p_k = \frac{\partial S^*}{\partial q_k}, t \right) + \frac{\partial S^*}{\partial t} = 0 . \quad (36)$$

Diese partielle Differentialgleichung wird **Hamilton-Jacobische-Differentialgleichung** genannt.

S^* hat die Form:

$$S^*(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) .$$

Die Erzeugende S^* hat also die Variablen $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ und t . Die α_k sind Parameter der Funktion S^* und gleichzeitig die neuen Impulse P_k mit $P_k = \text{const.}$, da $\tilde{H} = 0$.

Für die transformierten Koordinaten gilt ebenfalls $Q_k = \text{const.}$, da $\frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = 0$ gilt. Q_k lässt sich aber auch aus der Erzeugenden S^* bestimmen. Es gilt:

$$Q_k = \frac{\partial S^*(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t)}{\partial \alpha_k} = \beta_k = \text{const.}$$

Die Gleichung lässt sich nach q_k auflösen (um die Koordinaten q_k ersetzen zu können), wenn $\det \left(\frac{\partial^2 S^*}{\partial \alpha_k \partial q_l} \right) \neq 0$ gilt.

Mit der Hamilton-Jacobischen-Differentialgleichung erhalten wir eine partielle Differentialgleichung, die von $n+1$ Variablen abhängt. Sie entspricht den kanonischen Bewegungsgleichungen.

Die Hamilton-Jacobische-Differentialgleichung vereinfacht sich, wenn H nicht explizit von der Zeit abhängt. Dann genügt es zu fordern:

$$S^*(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t) = S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) - Et ,$$

so dass die Hamilton-Jacobische-Differentialgleichung lautet:

$$\tilde{H} = H \left(\mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial q_k} \right) - E = 0 .$$

Beispiel: Freies Teilchen $H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$.

Wir erhalten dann $q_i = r_i$, so dass aus:

$$\tilde{H} = H \left(\mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial S^*}{\partial t} = 0$$

folgt:

$$\frac{1}{2m} \underbrace{(\nabla S^*)^2}_{\mathbf{p}} + \frac{\partial S^*}{\partial t} = 0 .$$

Die partielle Differentialgleichung hat die Lösung:

$$S^*(\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, t) = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r} - \frac{\boldsymbol{\alpha}^2}{2m} t + c .$$

Man kann dann die neuen Koordinaten β_k bestimmen, aus:

$$\beta_k = \frac{\partial S^*}{\partial \alpha_k} = r_k - \frac{\alpha_k}{m} t$$

bzw.

$$\mathbf{r}(t) = \boldsymbol{\beta} + \frac{t}{m} \boldsymbol{\alpha} ,$$

also wie erwartet die gleichförmig gradlinige Bewegung des Teilchens.

Durch die Hamilton-Jacobische-Differentialgleichung hat sich also das Problem der Integration von Bewegungsgleichungen auf die Lösung einer partiellen Differentialgleichung mit $n + 1$ Variablen verschoben.

Zur praktischen Lösung versucht man die Hamilton-Jacobische-Differentialgleichung in den Variablen zu separieren, so dass man für zeitunabhängige Hamiltonfunktionen n eindimensionale Integrationen durchzuführen hat. Dies ist beispielsweise möglich, wenn H die Form $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{k=1}^n H_k(q_k, p_k)$ hat.

5 Oszillationen

5.1 Die Bedeutung des Oszillatorpotentials

Ein mechanisches System befindet sich im Gleichgewicht, wenn die generalisierten Kräfte, die auf das System wirken, verschwinden, also falls:

$$-\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n .$$

Offensichtlich entspricht die Gleichgewichtsbedingung einer notwendigen Bedingung für ein Extremum des Potentials im Konfigurationsraum. Man unterscheidet **stabile** und **instabile Gleichgewichtspositionen**.

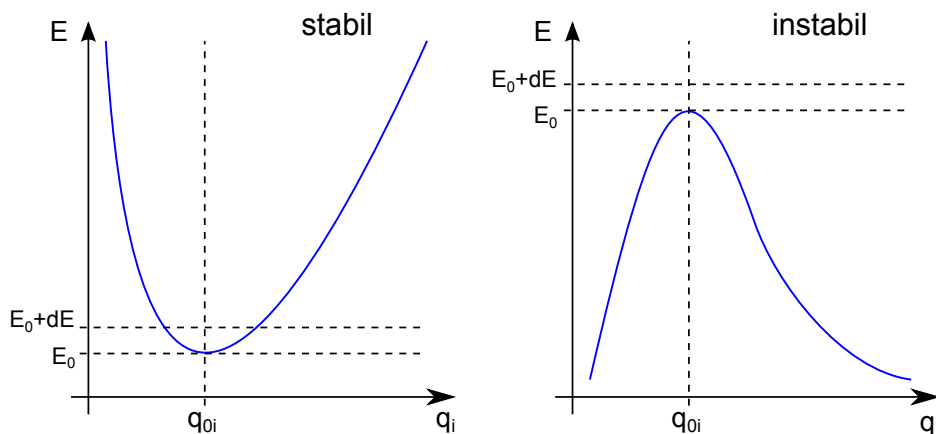


Abbildung 9: Stabile und Instabile Gleichgewichtsposition.

Bei kleinen Auslenkungen um eine stabile Gleichgewichtsposition wird sich das System nur endlich weit von der Gleichgewichtslage entfernen, während bei instabilen Gleichgewichtslagen eine unbeschränkte Bewegung möglich ist.

Wir wollen nun ein Potential $V(\mathbf{q})$ um die Gleichgewichtsposition \mathbf{q}_0 entwickeln:

$$V(\mathbf{q}) = V(\mathbf{q}_0) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} \eta_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} \eta_i \eta_j + \mathcal{O}(\eta^3)$$

mit $q_i = q_{0i} + \eta_i$. Die Koordinaten η_i beschreiben also die i -te Komponente der Auslenkung aus der Gleichgewichtsposition.

Da wir den Absolutwert des Potentials frei wählen können, setzen wir zur Vereinfachung:

$$V(\mathbf{q}_0) = 0 .$$

Nach Voraussetzung gilt aber auch $\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} = 0$ im Gleichgewicht, so dass sich das Potential in die Form:

$$V = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right)_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} \eta_i \eta_j \equiv \frac{1}{2} V_{ij} \eta_i \eta_j$$

bringen lässt. Die Art des Gleichgewichts und das Verhalten des Systems wird also durch die Matrix V_{ij} bestimmt.

Für die kinetische Energie kann man eine ähnliche Entwicklung durchführen. Die kinetische Energie ist quadratisch in den Geschwindigkeiten, sodass:

$$T = \sum_{i,j} \frac{1}{2} m_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_{ij}(\mathbf{q}) \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j .$$

Im allgemeinen Fall sind die Koeffizienten m_{ij} Funktionen der generalisierten Koordinaten q_i . Die Koeffizientenfunktionen $m_{ij}(\mathbf{q})$ kann man wiederum um \mathbf{q}_0 entwickeln:

$$m_{ij}(\mathbf{q}) = m_{ij}(\mathbf{q}_0) + \sum_k \left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} \right)_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} \eta_k + \dots$$

Da wir nur an kleinen Auslenkungen η_i um die Gleichgewichtslage interessiert sind (insbesondere ist dE eine kleine Größe und damit auch die Amplituden der Geschwindigkeiten), brauchen wir nur den konstanten Term der Koeffizientenfunktion zu berücksichtigen, der auf einen Term $\mathcal{O}(\eta^2)$ führt.

Mit $m_{ij}(\mathbf{q}_0) = T_{ij}$ lässt sich dann die Lagrange-Funktion in der Form:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - V_{ij} \eta_i \eta_j$$

schreiben, die auf die Bewegungsgleichungen:

$$\sum_{j=1}^n T_{ij} \ddot{\eta}_j + V_{ij} \eta_j = 0 \quad (\text{mit } T_{ij} = T_{ji} \quad \text{und} \quad V_{ij} = V_{ji})$$

führt.

Bemerkung:

In der Regel gilt $T_{ij} = 0$ für $i \neq j$, so dass sich Lagrange-Funktion und Bewegungsgleichungen entsprechend vereinfachen.

5.2 Die Entwicklung periodischer Funktionen in Fourierreihen

Mit der Taylorreihe haben wir bereits eine wichtige Methode zur Darstellung einer Funktion in einer Reihensumme kennengelernt. Die Entwicklung in eine Taylorreihe setzt voraus, dass die Funktion stetig differenzierbar ist.

Fourierreihen stellen eine alternative Möglichkeit zur Reihenentwicklung von Funktionen dar. Funktionen können dann in eine Fourierreihe entwickelt werden, wenn

1. die Funktion $f(x)$ periodisch ist.
2. die Funktion mit Ausnahme einer endlichen Zahl von endlichen Sprüngen stetig ist.
3. die Funktion eine endliche Zahl von Extremstellen innerhalb einer Periode hat.
4. das Integral von $|f(x)|$ über eine volle Periode konvergiert.

Die Entwicklung in eine Fourierreihe hat den Vorteil, dass die Funktion einfach zu differenzieren ist. Außerdem muss $f(x)$ nicht differenzierbar sein.

Die **Fourierreihe** einer Funktion $f(x)$ hat die Form:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi kx}{L}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kx}{L}\right) \right] .$$

Die Koeffizienten a_0 , a_k und b_k nennt man **Fourierkoeffizienten**, L ist die **Periodenlänge**.

Man kann zeigen, dass man jede gerade (ungerade) Funktion als Kosinusreihe (Sinusreihe) darstellen kann, wenn die Funktion periodisch ist. Dann kann man aber auch beliebige periodische Funktionen (die die Bedingungen (2)-(4) erfüllen) als Fourierreihe darstellen, da:

$$f(x) = \frac{1}{2} [f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2} [f(x) - f(-x)] = \tilde{f}_g(x) + \tilde{f}_u(x) ,$$

wobei \tilde{f}_g offensichtlich eine gerade und \tilde{f}_u eine ungerade Funktion ist.

Für die Sinus- und Kosinusfunktionen gelten einige wichtige Identitäten:

$$\int_{x_0}^{x_0+L} \sin\left(\frac{2\pi kx}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi px}{L}\right) dx = 0 \quad \forall k, p \in \mathbb{N}_0$$

$$\int_{x_0}^{x_0+L} \cos\left(\frac{2\pi kx}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi px}{L}\right) dx = \begin{cases} L & \text{für } k = p = 0 \\ \frac{L}{2} & \text{für } k = p > 0 \\ 0 & \text{für } k \neq p \end{cases}$$

$$\int_{x_0}^{x_0+L} \sin\left(\frac{2\pi kx}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi px}{L}\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } k = p = 0 \\ \frac{L}{2} & \text{für } k = p > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese Identitäten lassen sich elementar herleiten, wenn man die Sinus- und Kosinusfunktionen durch die komplexe Exponentialfunktion:

$$\exp(ix) = \cos(x) + i \sin(x)$$

ausdrückt.

Die Fourierkoeffizienten ergeben sich aus:

$$a_k = \frac{2}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} f(x) \cos\left(\frac{2\pi kx}{L}\right) dx, \quad (37)$$

$$b_k = \frac{2}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} f(x) \sin\left(\frac{2\pi kx}{L}\right) dx. \quad (38)$$

Bemerkung:

Diese Definition schließt a_0 mit ein.

Die obigen Ausdrücke für die Fourierkoeffizienten a_k und b_k ergeben sich durch Einsetzen der Fourierreihe:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi kx}{L}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kx}{L}\right) \right]$$

in (37) und (38):

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_0+L} f(x) \cos\left(\frac{2\pi px}{L}\right) dx &= \frac{a_0}{2} \int_{x_0}^{x_0+L} \cos\left(\frac{2\pi px}{L}\right) dx \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{x_0}^{x_0+L} \cos\left(\frac{2\pi kx}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi px}{L}\right) dx \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_{x_0}^{x_0+L} \sin\left(\frac{2\pi kx}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi px}{L}\right) dx . \end{aligned}$$

1. *Fall*: $p = 0$

Beide Reihensummen verschwinden, so dass:

$$\int_{x_0}^{x_0+L} f(x) dx = \frac{a_0 L}{2} \quad \text{bzw.} \quad a_0 = \frac{2}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} f(x) dx .$$

2. *Fall*: $p \neq 0$

Der erste und dritte Term auf der rechten Seite verschwinden. Aus der Reihensumme bleibt:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_0+L} f(x) \cos\left(\frac{2\pi px}{L}\right) dx &= a_p \frac{L}{2} \\ \rightarrow a_p &= \frac{2}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} f(x) \cos\left(\frac{2\pi px}{L}\right) dx . \end{aligned}$$

Analog ergeben sich die Koeffizienten b_k .

5.2.1 Symmetrien

Die Fourierkoeffizienten a_i verschwinden für ungerade Funktionen und die b_i für gerade Funktionen. Dies lässt sich einfach aus der Definition der Koeffizienten a_i, b_i erschließen, wenn man $x_0 = -\frac{L}{2}$ wählt. Da das Integral $\int_{-a}^a g(x) dx$ für eine ungerade Funktion verschwindet, ergeben sich die genannten Ergebnisse für die Fourierkoeffizienten.

Ähnliche Aussagen lassen sich auch für allgemeinere Symmetrien machen. So ergibt sich beispielsweise bei einer Symmetrie um $L/4$, das heißt $f(L/4-x) = \pm f(x-L/4)$, mit der Substitution $u = x - L/4$ ($f(u) = \pm f(-u)$):

$$b_k = \frac{2}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} f(u) \sin\left(\frac{2\pi ku}{L} + \frac{\pi k}{2}\right) du .$$

Aus dem Additionstheorem

$$\sin\left(\frac{2\pi ku}{L} + \frac{\pi k}{2}\right) = \sin\left(\frac{2\pi ku}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) + \cos\left(\frac{2\pi ku}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)$$

ergibt sich wegen:

$$\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \sin(n\pi) = 0 \quad (n \in \mathbb{Z})$$

- (1) falls $f(x)$ gerade um $L/4$ ist, gilt $a_{2k+1} = 0, b_{2k} = 0$
- (2) falls $f(x)$ ungerade um $L/4$ ist, gilt $a_{2k} = 0, b_{2k+1} = 0$.

5.2.2 Funktionen mit endlichem Definitionsbereich

Es lassen sich auch nicht-periodische Funktionen in Fourierreihen entwickeln, wenn man sie auf einem endlichen Intervall betrachtet.

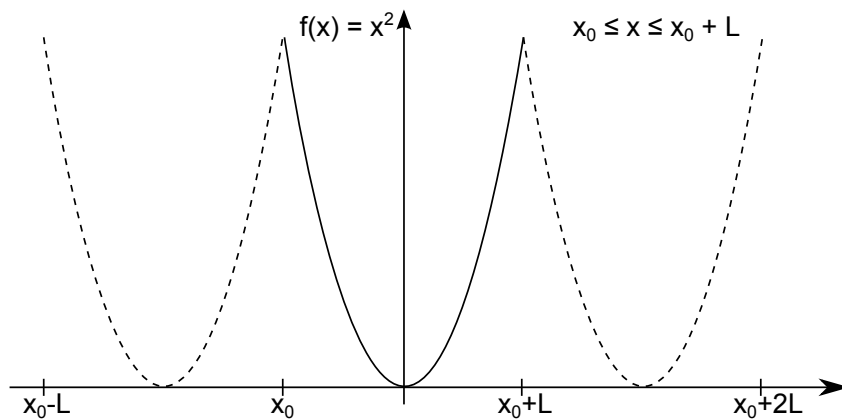


Abbildung 10: Periodische Fortsetzung der Funktion $f(x)$.

Durch periodische Fortsetzung der Funktion lässt sie sich dann in eine Fourierreihe entwickeln. Eine wichtige Technik zur expliziten Berechnung von Fourierreihen besteht darin sie durch Differentiation oder Integration bekannter Fourierreihen zu bestimmen. Dies soll am folgenden Beispiel erläutert werden.

Beispiel: Wir betrachten zunächst die Fourierreihe der Funktion:

$$f(x) = x^2, \quad -2 \leq x \leq 2.$$

Wenn wir die Funktion im Intervall $-2 \leq x \leq 2$ betrachten und periodisch fortsetzen ist $f(x)$ gerade.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad b_k &= 0 \quad \text{und} \\ a_k &= \frac{2}{4} \int_{-2}^2 x^2 \cos\left(\frac{2\pi kx}{4}\right) dx \\ &= \int_0^2 x^2 \cos\left(\frac{\pi kx}{2}\right) dx \stackrel{\text{part. Int.}}{=} \frac{16}{\pi k^2} (-1)^k \quad (k \neq 0) \\ a_0 &= \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3} \\ \rightarrow \quad x^2 &= \frac{4}{3} + 16 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi^2 k^2} \cos\left(\frac{\pi kx}{2}\right) \quad \text{mit } 0 \leq x \leq 2 \end{aligned}$$

Die Reihe für $f(x) = x^3$ ($0 \leq x \leq 2$) lässt sich dann aus der Integration der Reihe von $f(x) = x^2$ berechnen:

$$\frac{x^3}{3} = \frac{4}{3}x + 32 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi^3 k^3} \sin\left(\frac{\pi kx}{2}\right) + C.$$

Die Fourierreihe für x erhalten wir aus der Ableitung der Fourierreihe von x^2 :

$$2x = -8 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi kx}{2}\right)$$

und damit insgesamt:

$$x^3 = -16 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi kx}{2}\right) + 96 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi^3 k^3} \sin\left(\frac{\pi kx}{2}\right).$$

Die Konstante ergibt sich zu $C = 0$, wegen $\sin\left(\frac{\pi kx}{2}\right)_{x=0} = 0$.

Man kann die Fourierreihe auch als Reihe der komplexen Exponentialfunktion schreiben. Aus $\exp(ikx) = \cos(kx) + i \sin(kx)$ ergibt sich dann:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left(\frac{2\pi ikx}{L}\right)$$

mit:

$$c_k = \frac{1}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} f(x) \exp\left(-\frac{2\pi ikx}{L}\right) dx$$

Die Gültigkeit der obigen Entwicklung ergibt sich analog zur Sinus- und Kosinusreihe aus:

$$\int_{x_0}^{x_0+L} \exp\left(-\frac{2\pi ipx}{L}\right) \exp\left(\frac{2\pi ikx}{L}\right) dx = \begin{cases} L & \text{für } k = p \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gelten die Beziehungen:

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \quad \text{und} \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k) .$$

5.3 Gekoppelte Oszillationen: Eigenwertgleichungen und Hauptkoordinaten

Wir kehren nun zum Problem gekoppelter Oszillatoren zurück und betrachten die Bewegungsgleichung:

$$\sum_{j=1}^n T_{ij} \ddot{\eta}_j + V_{ij} \eta_j = 0 .$$

Zur Lösung des Oszillatorproblems machen wir den Ansatz:

$$\eta_i = C a_i e^{i(\omega t + \delta)} ,$$

der auf die Säkulargleichung:

$$(V_{ij} a_j - \omega^2 T_{ij} a_j) = 0$$

führt. Die Amplituden a_i verschwinden nur dann nicht, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix $|V_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$ verschwindet. In kompakter Notation betrachten wir also das Eigenwertproblem:

$$\underline{\underline{V}} \underline{\underline{a}} = \lambda \underline{\underline{T}} \underline{\underline{a}} \quad \text{mit} \quad \omega^2 = \lambda .$$

Aus der Säkulargleichung $\det(V_{ij} - \omega^2 T_{ij})$ ergeben sich dann n Eigenfrequenzen ω_k , die auf die Lösung:

$$\eta_{ik} = C_k a_{ik} \exp \left[i \left(\omega_k t - \tilde{\delta}_k \right) \right]$$

führen. Wir betrachten nur Systeme ohne Dämpfung, so dass wir reelle Lösungen erwarten:

$$\eta_{ik} = C_k a_{ik} \cos(\omega_k t - \delta_k)$$

bzw. in vektorieller Form:

$$\boldsymbol{\eta}_k = C_k \mathbf{a}_k \cos(\omega_k t - \delta_k)$$

mit den Integrationskonstanten C_k und δ_k . Durch die $\boldsymbol{\eta}_k(t)$ werden die sogenannten **Fundamentalschwingungen** bezeichnet, die sich dadurch auszeichnen, dass zwischen den Oszillatoren keine Energie ausgetauscht wird. Die allgemeine Lösung ist dann durch Superposition gegeben:

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \sum_{k=1}^n \boldsymbol{\eta}_k(t) .$$

Beispiel: Ein System zweier gekoppelter Oszillatoren.

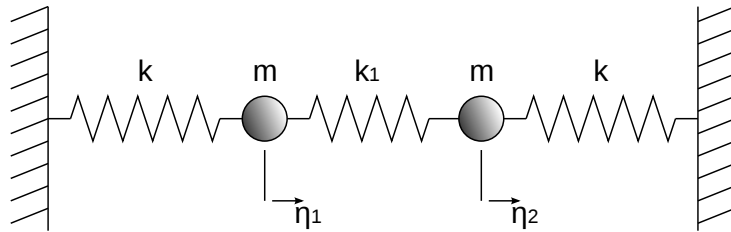


Abbildung 11: Zwei gekoppelte Oszillatoren.

Die Bewegungsgleichungen für das obige Oszillatorsystem lauten:

$$\begin{aligned} m\ddot{\eta}_1 + (k + k_1)\eta_1 - k_1\eta_2 &= 0 , \\ m\ddot{\eta}_2 + (k + k_1)\eta_2 - k_1\eta_1 &= 0 , \end{aligned}$$

wobei η_i die Auslenkung der i -ten Masse angibt.

Mit $\eta_i(t) = Ca_i \cos(\omega t - \delta)$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} (k + k_1 - m\omega^2)a_1 - k_1a_2 &= 0 \\ -k_1a_1 + (k + k_1 - m\omega^2)a_2 &= 0 \\ \rightarrow \det \begin{pmatrix} (k + k_1 - m\omega^2) & -k_1 \\ -k_1 & (k + k_1 - m\omega^2) \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

und somit :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k_1}{m}} .$$

Die Eigenvektoren ergeben sich zu:

$$\mathbf{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Im ersten Fall schwingen die Massen also in Phase, im zweiten Fall gegenphasig.

Wenn wir uns wieder dem Ursprungsproblem zuwenden, suchen wir eine lineare Transformation (**Hauptachsentransformation**), die die Matrizen \underline{T} und \underline{V} gleichzeitig diagonalisiert, da die Bewegungsgleichung dann die triviale Form:

$$T_{ii} \ddot{q}_i + V_{ii} q_i = 0$$

hat, so dass:

$$q_i(t) = C_i \cos(\omega_i t - \delta_i) \quad , \quad \omega_i^2 = \frac{V_{ii}}{T_{ii}}$$

gilt.

a_{jr} ist die j -te Komponente des r -ten Eigenvektors $\boldsymbol{\eta}_r$. Damit ergibt sich:

$$\sum_{j=1}^n V_{ij} a_{jr} = \omega_r^2 \sum_{j=1}^n T_{ij} a_{jr}$$

und analog:

$$\sum_{j=1}^n V_{ij} a_{js} = \omega_s^2 \sum_{j=1}^n T_{ij} a_{js}$$

$$\rightarrow \sum_{i,j} a_{is} V_{ij} a_{jr} - \sum_{i,j} a_{ir} V_{ij} a_{js} \stackrel{V_{ij}=V_{ji}}{=} 0 = (\omega_r^2 - \omega_s^2) \sum_{i,j} T_{ij} a_{ir} a_{js} .$$

Da $\omega_r \neq \omega_s$ folgt:

$$\sum_{i,j} a_{ir} T_{ij} a_{js} = 0 \quad \text{für } r \neq s .$$

Für $r = s$ gilt:

$$\sum_{i,j} \eta_{ir} T_{ij} \eta_{jr} = C_r^2 \omega_r^2 \cos^2(\omega_r t - \delta_r) \sum_{i,j} a_{ir} T_{ij} a_{jr} > 0 ,$$

da die kinetische Energie (außer an den Umkehrpunkten) positiv ist. Durch geeignete Wahl von C_r können wir also die Summe so normieren, dass:

$$\sum_{i,j} a_{ir} T_{ij} a_{jr} = 1 \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{T}} \underline{\underline{A}} = \mathbb{1}$$

mit

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} .$$

Mit der Matrix

$$\underline{\underline{\Omega}}^2 = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & & & 0 \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \omega_n^2 \end{pmatrix}$$

können wir dann die Gleichungen

$$\sum_{j=1}^n [V_{ij} - \omega_r^2 T_{ij}] a_{jr} = 0 \quad , \quad i, r = 1, \dots, n$$

umschreiben in:

$$\underline{\underline{V}} \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{T}} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\Omega}}^2 \quad \xrightarrow{\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{T}} \underline{\underline{A}} = 1} \quad \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{V}} \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{\Omega}}^2 .$$

Damit diagonalisiert $\underline{\underline{A}}$ sowohl $\underline{\underline{T}}$ als auch $\underline{\underline{V}}$ und erzeugt damit die Hauptachsentransformation. Durch:

$$\eta_i =: \sum_{r=1}^n a_{ir} \zeta_r$$

werden dann die **Hauptkoordinaten** ζ_r definiert. In den Hauptkoordinaten sind die n Oszillatoren entkoppelt:

$$\begin{aligned} L(\underline{\underline{\zeta}}, \dot{\underline{\underline{\zeta}}}) &= \sum_{i,j} \sum_{r,s} [a_{ir} T_{ij} a_{js} \dot{\zeta}_r \dot{\zeta}_s - a_{ir} V_{ij} a_{js} \zeta_r \zeta_s] \\ &= \sum_{r=1}^n [\dot{\zeta}_r^2 - \omega_r^2 \zeta_r^2] \\ \rightarrow \quad \boxed{\ddot{\zeta}_r + \omega_r^2 \zeta_r = 0} \quad &\text{mit } r = 1, 2, \dots, n . \end{aligned}$$

Dies sind die entkoppelten Bewegungsgleichungen des Systems in den Hauptkoordinaten ζ_r .

5.4 Erzwungene Schwingungen und Dämpfung

Periodische Anregungen

Wir betrachten nun keine isolierten Oszillatorsysteme sondern solche, die mit einer periodischen Kraft \mathbf{F} angeregt werden, deren Komponente F_j auf die Koordinate η_j wirkt.

Die generalisierte Kraft Q_j , die auf die Hauptkoordinate ζ_j wirkt, ergibt sich dann aus:

$$Q_j = \sum_j A_{ji} F_j .$$

Nach der Transformation in Hauptkoordinaten lauten die entkoppelten Bewegungsgleichungen damit:

$$\ddot{\zeta}_i + \omega_i^2 \zeta_i = Q_i .$$

Hier betrachten wir Anregungen, die in der Form:

$$Q_i = Q_{0i} \cos(\omega t + \delta_i)$$

geschrieben werden können, wobei ω die Anregungsfrequenz bezeichnet. Die Bewegungsgleichungen lauten dann entsprechend:

$$\ddot{\zeta}_i + \omega_i^2 \zeta_i = Q_{0i} \cos(\omega t + \delta_i) .$$

Die Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung ergibt sich aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung sowie einer speziellen Lösung der inhomogenen.

Wir betrachten den Fall, dass das System für $t = 0$ im Ruhezustand ist. Dann verschwinden die Amplituden der freien Schwingung, die für reale Oszillatoren ohnehin weggedämpft werden.

Zur Bestimmung der inhomogenen Lösung machen wir den Ansatz:

$$\zeta_i(t) = B_i \cos(\omega t + \delta_i) .$$

Durch Einsetzen in die Bewegungsgleichung ergibt sich:

$$\begin{aligned} (-\omega^2 + \omega_i^2) B_i \cos(\omega t + \delta_i) &= Q_{0i} \cos(\omega t + \delta_i) \\ \rightarrow B_i &= \frac{Q_{0i}}{\omega_i^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

und damit:

$$\eta_j(t) = \sum_i A_{ji} \zeta_i = \sum_i \frac{A_{ij} Q_{0i} \cos(\omega t + \delta_i)}{\omega_i^2 - \omega^2} .$$

Für $\omega = \omega_i$ divergiert offenbar die Amplitude der Schwingung. Dieses Ergebnis ist für reale Oszillatorsysteme nicht direkt anwendbar. Zum einen ist die lineare Rückstellkraft häufig nur eine Näherung für kleine Auslenkungen. Desweiteren müssen wir dissipative Kräfte berücksichtigen.

Die dissipativen Kräfte sind linear in den Geschwindigkeiten, so dass die Bewegungsgleichungen die Form:

$$\sum_j T_{ij} \ddot{\eta}_j + \mathcal{F}_{ij} \dot{\eta}_j + V_{ij} \eta_j = 0$$

annehmen.

Im allgemeinen Fall können wir T_{ij} , \mathcal{F}_{ij} , V_{ij} nicht gemeinsam diagonalisieren, so dass wir keinen Satz unabhängiger Bewegungsgleichungen generieren können.

Es gibt aber Formen der Dissipationsfunktion

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \mathcal{F}_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j ,$$

die eine simultane Diagonalisierung erlauben. Für solche Systeme lauten die Bewegungsgleichungen:

$$\ddot{\zeta}_i + \mathcal{F}_i \dot{\zeta}_i + \omega_i^2 \zeta_i = 0 . \quad (39)$$

Dies sind lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, die mit dem Ansatz:

$$\zeta_i(t) = C_i e^{-i\omega'_i t}$$

gelöst werden. Einsetzen in (39) ergibt:

$$\begin{aligned} \omega_i'^2 + i\omega'_i \mathcal{F}_i - \omega_i^2 &= 0 \\ \rightarrow \omega'_i &= \pm \sqrt{\omega_i^2 - \frac{\mathcal{F}_i^2}{4}} - i \frac{\mathcal{F}_i}{2} . \end{aligned}$$

Wir unterscheiden nun die drei Fälle:

1. Schwache Dämpfung: $\omega_i^2 > \frac{\mathcal{F}_i^2}{4}$

$$\rightarrow \zeta_i(t) = e^{-\frac{\mathcal{F}_i}{2} t} [c_1 e^{i\tilde{\omega}_i t} + c_2 e^{-i\tilde{\omega}_i t}]$$

$$\text{mit } \tilde{\omega}_i = \sqrt{\omega_i^2 - \frac{\mathcal{F}_i^2}{4}} .$$

Die Schwingung hat dann die Form ($\zeta(0) = \zeta_0$, $\dot{\zeta}(0) = \dot{\zeta}_0$) aus Abbildung 12.

2. Starke Dämpfung: $\omega_i^2 < \frac{\mathcal{F}_i^2}{4}$

$$\rightsquigarrow \zeta_i(t) = c_1 e^{-\left(\frac{\mathcal{F}_i}{2} t + \sqrt{\frac{\mathcal{F}_i^2}{4} - \omega_i^2}\right) t} + c_2 e^{-\left(\frac{\mathcal{F}_i}{2} t - \sqrt{\frac{\mathcal{F}_i^2}{4} - \omega_i^2}\right) t}$$

(„aperiodische Kriechbewegung“)

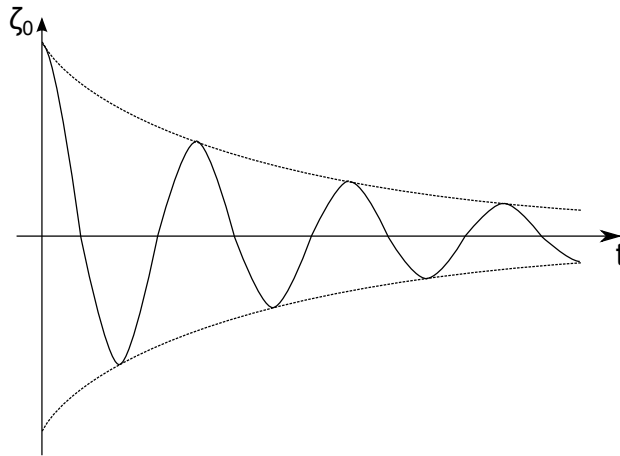


Abbildung 12: Zeitlicher Verlauf von Oszillationen bei schwacher Dämpfung.

3. Aperiodischer Grenzfall: $\omega_i^2 = \frac{F_i^2}{4}$

Der Eigenwert $\omega'_i = -i\frac{F_i}{2}$ ist entartet, so dass (siehe MMP) die Lösung die Form:

$$\zeta_i(t) = c_1 e^{-\frac{F_i}{2}t} + c_2 t e^{-\frac{F_i}{2}t}$$

hat.

Bislang hatten wir nur Anregungen der Form:

$$Q_i = Q_{0i} \cos(\omega t + \delta_i)$$

betrachtet. Für lineare Schwingungen ist es aber auch möglich beliebige periodische Anregungen mit

$$Q_i(t) = Q_i(t + T) \quad (T = \text{Periodendauer})$$

zu betrachten. Die Lösung ergibt sich dann aus der Entwicklung von $Q_i(t)$ in eine Fourierreihe:

$$Q_i(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \ .$$

Zur Bestimmung der inhomogenen Lösung macht man dann den Ansatz:

$$\zeta_i(t) = \zeta_{i0}(t) + \zeta_{i1}(t) + \zeta_{i2}(t) + \dots + \tilde{\zeta}_{i1}(t) + \tilde{\zeta}_{i2}(t) + \dots$$

mit den Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}\ddot{\zeta}_{i0} + \mathcal{F}_i \dot{\zeta}_{i0} + \omega_i^2 \zeta_{i0} &= \frac{a_0}{2} \\ \ddot{\zeta}_{in} + \mathcal{F}_i \dot{\zeta}_{in} + \omega_i^2 \zeta_{in} &= a_n \cos(n\omega t) \\ \ddot{\tilde{\zeta}}_{in} + \mathcal{F}_i \dot{\tilde{\zeta}}_{in} + \omega_i^2 \tilde{\zeta}_{in} &= b_n \sin(n\omega t)\end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \zeta_i(t) = \frac{a_0}{2\omega_i^2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_{in} \cos(n\omega t - \varphi_{in}) + B_{in} \sin(n\omega t - \varphi_{in})]$$

mit

$$\begin{aligned}A_{in} &= \frac{a_n}{\sqrt{(\omega_i^2 - n^2\omega^2)^2 + \mathcal{F}_i^2 n^2\omega^2}}, \\ B_{in} &= \frac{b_n}{\sqrt{(\omega_i^2 - n^2\omega^2)^2 + \mathcal{F}_i^2 n^2\omega^2}}, \\ \tan(\varphi_n) &= \frac{\mathcal{F}_i n\omega}{\omega_i^2 - n^2\omega^2}.\end{aligned}$$

Durch die Abhängigkeit der Koeffizienten A_{in} und B_{in} sowie der Phasenverschiebung φ_{in} von $n\omega$ hat die stationäre Schwingung eine deutlich andere Form als die anregende Schwingung.

5.5 Nichtlineare Schwingungen

Die harmonische Näherung, die eine lineare Rückstellkraft impliziert, ist für viele physikalische Systeme von großer Bedeutung. Es gibt aber auch Fälle, wie beispielsweise das mathematische Pendel für größere Auslenkungen, in denen die nichtlinearen Anteile nicht mehr vernachlässigt werden können. Solche Systeme werden dann mit Hilfe der **Störungsrechnung** behandelt. Wir betrachten dazu den Fall, dass die Rückstellkraft die Form:

$$F(x) = -kx + \varepsilon m x^n \quad n = 2, 3$$

hat, wobei $\varepsilon \ll 1$. Die nichtlineare Kraft führt auf die Bewegungsgleichung:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \varepsilon x^n = 0 \quad \text{mit} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

Da ε eine kleine Größe ist, machen wir den Ansatz:

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots,$$

wobei $x_0(t) = a \sin(\omega_0 t + \delta)$ die Lösung des ungestörten Oszillators bezeichnet.

Setzen wir nun die Reihenentwicklung in die Bewegungsgleichung ein, so ergibt sich in Potenzen von ε :

$$(\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0) + \varepsilon (\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 - x_0^n) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = 0 .$$

0te Ordnung 1te Ordnung 2te und höhere Ordnung

Die Differentialgleichung kann nur dann erfüllt sein, wenn die Ausdrücke in den Klammern verschwinden, also:

$$\begin{aligned} (i) \quad & \ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0 \\ (ii) \quad & \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 - x_0^n = 0 \end{aligned}$$

Die erste Gleichung entspricht dem ungestörten Oszillator. Zur Lösung von (ii) benötigt man $x_0(t)$ und kann dann die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung für $x_1(t)$ bestimmen. Analog verfährt man mit der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ die auf eine Differentialgleichung für $x_2(t)$ führt und die Kenntnis von x_0, x_1 voraussetzt.

Beispiel: Wir betrachten den nichtlinearen Oszillator:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \varepsilon x^2 = 0$$

mit $x_0(0) = A$ und $\dot{x}_0 = 0 \quad \rightarrow \quad x_0(t) = A \cos(\omega_0 t)$.

Dann ergibt sich in linearer Ordnung in ε :

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 - A^2 \cos^2(\omega_0 t) = 0$$

$$\rightsquigarrow \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = 2A^2 (1 + \cos(2\omega_0 t)) .$$

Die Lösung der homogenen Gleichung lautet:

$$x_1 = a \sin(\omega_0 t) + b \cos(\omega_0 t) .$$

Ferner ist:

$$x_s(t) = \frac{A^2}{6\omega_0^2} (3 - \cos(2\omega_0 t))$$

eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Mit den Anfangsbedingungen $x_1(0) = \dot{x}_1(0) = 0$ ergibt sich:

$$a = 0 \quad \text{und} \quad b = -\frac{A^2}{3\omega_0^2} ,$$

also insgesamt:

$$\begin{aligned} x(t) &\simeq x_0(t) + \varepsilon x_1(t) \\ &= A \cos(\omega_0 t) + \varepsilon \frac{A^2}{6\omega_0^2} (3 - 2 \cos(\omega_0 t) - \cos(2\omega_0 t)) . \end{aligned}$$

Es treten also neben der Grundfrequenz auch höhere Frequenzen auf. Dieses Phänomen setzt sich für höhere Ordnungen von ε fort.

Ein weiteres wichtiges Phänomen lässt sich am Beispiel des ebenen Pendels verdeutlichen. Die exakte Bewegungsgleichung des ebenen Pendels lautet:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0 \simeq \ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi - \varepsilon \varphi^3$$

mit $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ und $\varepsilon = \frac{g}{6l}$.

Die Anfangsbedingungen seien gegeben durch $\varphi(0) = A$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$, so dass wir wiederum $\varphi_0(t) = A \cos(\omega_0 t)$ erhalten. Für $\varphi_1(t)$ ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2 \varphi_1 &= \varphi_0^3 = \frac{A^3}{4} [3 \cos(\omega_0 t) + \cos(3\omega_0 t)] \\ \rightarrow \varphi_1(t) &= \frac{A^3}{32\omega_0^2} [\cos(\omega_0 t) + 12\omega_0 t \sin(\omega_0 t) - \cos(3\omega_0 t)] \end{aligned}$$

Wir erhalten also eine linear anwachsende Amplitude in linearer Ordnung von ε , so dass die Lösung nicht periodisch ist. Dieses Ergebnis ist ein Artefakt der Näherung und muss geeignet behandelt werden. Das Auftreten der nichtperiodischen oder säkularen Terme wird durch eine Verschiebung der Eigenfrequenzen $\omega_0 \rightarrow \omega_0 + \delta$ verursacht, die sich aus der nichtlinearen Kraft ergibt. Es gilt:

$$\sin[(\omega_0 + \delta)t] \simeq \sin(\omega_0 t) + t\delta \cos(\omega_0 t) - \frac{t^2 \delta^2}{2!} \sin(\omega_0 t) + O((t\delta)^3) .$$

Damit liegt es nahe, nicht nur die Lösung $x(t)$ sondern auch das Quadrat der Frequenzen in eine Potenzreihe zu entwickeln, also:

$$x(t) = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots \quad \text{und} \quad \omega_0^2 = \omega^2 + \varepsilon \alpha_1 + \varepsilon^2 \alpha_2 + \dots$$

Diese Entwicklung setzen wir in die Bewegungsgleichung $\ddot{x} + \omega_0^2 x - \varepsilon x^3 = 0$ ein und erhalten:

$$\begin{aligned} 0\text{te Ordnung:} \quad &\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0 \\ 1\text{te Ordnung:} \quad &\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = x_0^3 - \alpha_1 x_0 \\ 2\text{te Ordnung:} \quad &\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = 3x_0^2 x_1 - \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_0 \end{aligned}$$

Die α_i sind jeweils so zu bestimmen, dass die säkularen Terme in den einzelnen Ordnungen verschwinden.

5.6 Übergang zum schwingenden Kontinuum

Wir gehen wiederum von gekoppelten linearen Oszillatoren aus.



Abbildung 13: Übergang zum schwingenden Kontinuum: Die Abbildung zeigt gekoppelte Oszillatoren, die longitudinale bzw. transversale Schwingungen durchführen.

Diese Art von Systemen kann sowohl Schwingungen in der Horizontalen, also entlang der Ruhelagen (\leftrightarrow), ausführen, als auch in der Vertikalen (\updownarrow). Die horizontalen Schwingungen nennt man **longitudinale** Oszillationen, die vertikalen **transversale** Oszillationen.

Für den Übergang zum Kontinuum betrachten wir zunächst ein System aus n Massen, die mit Federn identischer Stärke gekoppelt sind. Wir gehen ferner davon aus, dass die Federn fest zwischen zwei Wänden eingespannt sind. Es gilt also:

$$m\ddot{q}_j + (2q_j - q_{j-1} - q_{j+1}) = 0 \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n$$

mit q_j : Auslenkung der j -ten Masse, m : Masse der Oszillatoren, k : Federkonstante und den Randbedingungen:

$$q_0(t) = q_{n+1}(t) = 0 \quad \forall t .$$

(Die Randbedingungen werden also durch „ortsfeste“ Oszillatoren realisiert.)
Wir machen den Ansatz:

$$q_j(t) = C a_j \cos(\omega t - \delta) = C \sin(\alpha_r j) \cos(\omega t - \delta) .$$

Der Ansatz entspricht also einer sinusförmigen Lösung in Ort und Zeit. Aus den Randbedingungen ergibt sich direkt:

$$\begin{aligned} \sin[(n+1)\alpha_r] &= 0 \\ \rightarrow (n+1)\alpha_r &= r\pi \quad \text{bzw.} \quad \alpha_r = \frac{r\pi}{n+1} \quad , \quad r = 1, 2, \dots, n . \end{aligned}$$

Wenn wir den Ansatz in die Bewegungsgleichungen einsetzen, erhalten wir:

$$[-m\omega^2 + 2k(1 - \cos(\alpha_r))] C \sin(\alpha_r j) = 0 .$$

Da wir uns nur für endliche Auslenkungen interessieren muss [...] = 0 gelten:

$$\omega^2 = 2\frac{k}{m} [1 - \cos(\alpha_r)] \quad \rightarrow \quad \omega_r = 2\omega_0 \sin\left(\frac{\pi r}{2(n+1)}\right)$$

mit $\cos(2\alpha_r) = 1 - 2\sin^2(\alpha_r)$ und $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

Für die allgemeine Lösung erhalten wir damit:

$$\begin{aligned} q_j(t) &= \sum_{r=1}^n C_r \sin\left(\frac{\pi r}{n+1}j\right) \cos(\omega_r t - \delta_r) \\ &= \sum_{r=1}^n \sin\left(\frac{\pi r}{n+1}j\right) [d_r \cos(\omega_r t) + e_r \sin(\omega_r t)] \end{aligned}$$

Der Vorfaktor $\sin(\alpha_r j)$ bestimmt die Amplitude des j -ten Oszillators zur Eigenfrequenz ω_r . Die Konstanten d_r und e_r werden durch die Anfangsbedingungen festgelegt:

$$d_r = \frac{2}{n+1} \sum_{j=1}^n q_j(0) \sin(\alpha_r j) \quad \text{und} \quad e_r = \frac{2}{n+1} \sum_{j=1}^n \dot{q}_j(0) \cos(\alpha_r j) .$$

Beim Übergang vom System aus n Oszillatoren zum schwingenden Kontinuum machen wir folgende Annahmen:

- $n \rightarrow \infty$, $l \rightarrow 0$, $l =$ Abstand der Oszillatoren in Ruhelage
- Die Gesamtenergie soll erhalten bleiben.
- Der Abstand zwischen den Oszillatoren soll so verschwinden, dass:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)l = L = \text{const.}$$

- Die typische Anregungsenergie soll erhalten bleiben, das heißt:

$$k \cdot l = \text{const.}$$

Mit diesen Annahmen lauten die Bewegungsgleichungen:

$$\frac{m}{kl^2} \ddot{q}_j = \frac{1}{l} \left[\frac{q_{j+1} - q_j}{l} - \frac{q_j - q_{j-1}}{l} \right] .$$

Für $l \rightarrow 0$ ersetzen wir $q_j \rightarrow q(x, t)$ mit $x = jl$ und erhalten:

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{l} \left[q'(x + \frac{l}{2}) - q'(x - \frac{l}{2}) \right] = q''(x) .$$

Da $m/l = \rho = \text{const.}$ und $kl = \text{const.}$ gilt, erhalten wir also insgesamt:

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \quad \text{mit} \quad c^2 = \frac{kl}{\rho}} .$$

Dies ist die eindimensionale **Wellengleichung**.

5.6.1 Lösung der Wellengleichung

Bernoullische Lösung (stehende Wellen):

Wir machen dazu den Produkt- bzw. Separationsansatz:

$$q(x, t) = g(x)h(t) .$$

Einsetzen in die Wellengleichung ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \ddot{h}(t)g(x) &= h(t)g''(x) \\ \rightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{h}}{h} &= \frac{g''}{g} = \text{const.} \equiv -k^2 . \end{aligned}$$

Da die linke Seite nur von t und die rechte nur von x abhängt, müssen beide Seiten konstant sein. Wir nennen diese Konstante $-k^2$. Es bleibt das Problem der beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\ddot{h} = -\frac{k^2}{c^2}h \quad \text{und} \quad g'' = -k^2g$$

zu lösen. Wir erhalten also:

$$\begin{aligned} h(t) &= h_1 \cos(kct) + h_2 \sin(kct) \\ g(x) &= g_1 \cos(kx) + g_2 \sin(kx) \end{aligned}$$

Wie gewöhnlich lassen sich die Konstanten aus den Randbedingungen bestimmen. Aus $g(0) = g(L) = 0$ ergibt sich:

$$g_1 = 0 \quad \text{und} \quad k = r \frac{\pi}{L} \quad , \quad r = 1, 2, \dots$$

Die zugehörigen Eigenfrequenzen lauten:

$$k_r ct \equiv \omega_r t \quad \text{bzw.} \quad \omega_r = r \frac{\pi c}{L} .$$

Wenn wir uns daran erinnern, dass $c = \sqrt{\frac{kl}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ sollten wir ein theoretisches Verständnis für das Stimmen von Saiteninstrumenten gewonnen haben.

Die ω_r nennt man **Eigenfrequenzen**, wobei die Randbedingungen für das Auftreten diskreter Eigenfrequenzen verantwortlich sind.

Die allgemeine Lösung der Wellengleichung lautet damit:

$$q(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right) [d_r \cos(\omega_r t) + e_r \sin(\omega_r t)] .$$

Die Lösung ist periodisch, da die Frequenzen ganzzahlige Vielfache des Grundtons ω_1 sind.

Die verbliebenen Konstanten d_r und e_r ergeben sich aus den Anfangsbedingungen. Aus der allgemeinen Lösung erhalten wir:

$$q(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} d_r \sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right) \quad \text{und} \quad \dot{q}(x, 0) = \sum_{r=1}^{\infty} e_r \omega_r \sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right) .$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten d_r und e_r multiplizieren wir jeweils beide Gleichungen mit $\sin(s\pi x/L)$ und mit:

$$\int_0^L \sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{s\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{2} \delta_{rs}$$

erhalten wir:

$$d_s = \frac{2}{L} \int_0^L q(x, 0) \sin\left(\frac{s\pi x}{L}\right) dx \quad \text{und}$$

$$e_s = \frac{2}{L} \omega_s \int_0^L \dot{q}(x, 0) \sin\left(\frac{s\pi x}{L}\right) dx .$$

Die d'Alembertsche Lösung:

Die Wellengleichung wird durch beliebige Funktionen $q(x, t) = f(x \pm ct)$ gelöst (siehe Übung). $f(x - ct)$ beschreibt eine Welle, die sich mit Geschwindigkeit c in positiver x -Richtung ausbreitet und umgekehrt $f(x + ct)$ eine Welle in negativer x -Richtung.

Die allgemeine Lösung der Wellengleichung lautet also:

$$q(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct) .$$

Aus den Anfangsbedingungen erhalten wir die Beziehungen:

$$q(x, 0) = f_1(x) + f_2(x) \tag{40}$$

$$\dot{q}(x, 0) = -cf_1'(x) + cf_2'(x) \tag{41}$$

Aus den Randbedingungen erhalten wir:

$$\begin{aligned} q(0, t) &= f_1(-ct) + f_2(ct) = 0 \quad \forall t \\ q(L, t) &= f_1(L - ct) + f_2(L + ct) = 0 \end{aligned}$$

Aus den Anfangsbedingungen lassen sich $f_1(x)$ und $f_2(x)$ durch Integration von (41) bestimmen:

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{c} \int_{x_0}^x \dot{q}(x', 0) \, dx' \quad (x_0 \text{ beliebig})$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{(40)} \quad f_1(x) &= \frac{1}{2} \left[q(x, 0) - \frac{1}{c} \int_{x_0}^x \dot{q}(x', 0) \, dx' \right] \\ f_2(x) &= \frac{1}{2} \left[q(x, 0) + \frac{1}{c} \int_{x_0}^x \dot{q}(x', 0) \, dx' \right] \end{aligned}$$

Damit ist die Funktion in $0 \leq x \leq L$ bestimmt. Es gilt ferner $\forall x$:

$$f_1(-x) = f_2(x) \quad \text{und} \quad f_2(L+x) = -f_1(L-x)$$

aus den Randbedingungen. Durch Einsetzen erhalten wir:

$$\begin{aligned} f_1(-x-L) &= -f_2(x+L) = f_1(-x+L) \\ f_2(x+L) &= -f_1(-x+L) = f_2(x-L) \end{aligned}$$

\Rightarrow Die Funktionen f_1, f_2 sind periodisch mit der Periode $2L$. Die Funktionen \dot{q}, \ddot{q} sind damit auf der ganzen reellen Achse durch Anfangs- und Randbedingungen festgelegt.

6 Mechanik des starren Körpers

In den bisherigen Kapiteln dieser Vorlesung hatten wir uns ausschließlich mit der Mechanik von Massenpunkten beschäftigt. Die Bewegung eines Massenpunktes ist durch die Kenntnis des Anfangsortes und der Anfangsgeschwindigkeit eindeutig festgelegt. Bei ausgedehnten bzw. starren Körpern ist zusätzlich ihre Lage im Raum und deren zeitliche Entwicklung von Bedeutung.

Definition des **starren Körpers**:

1. System von N Massenpunkten m_1, \dots, m_N , die durch feste Abstände miteinander verbunden sind.

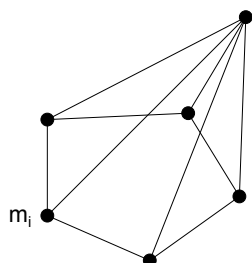


Abbildung 14: System von Massenpunkten.

2. Ein Körper mit fest vorgegebener Massenverteilung $\rho(\mathbf{r})$.

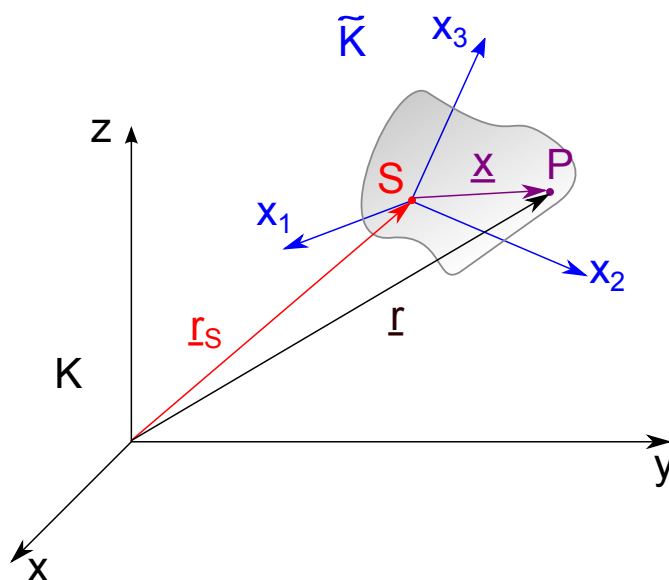


Abbildung 15: Starrer Körper mit den Koordinatensystemen K und \tilde{K} .

Für die Gesamtmasse gilt im 1. Fall:

$$M = \sum_{i=1}^N m_i$$

und im 2. Fall:

$$M = \int \varrho(\mathbf{r}) \, d^3r .$$

Es ist zweckmäßig zwei Koordinatensysteme einzuführen: Ein raumfestes Inertialsystem K und ein mitbewegtes \tilde{K} . (siehe Abbildung 15)

Ein starrer Körper hat 6 Freiheitsgrade: Die Lage des Aufpunktes \mathbf{S} und die Orientierung des Koordinatensystems \tilde{K} .

6.1 Infinitesimale Verrückung eines starren Körpers

Für einen Punkt P des starren Körpers bei $\mathbf{r} \in K$ gilt bei einer infinitesimalen Translation und Rotation:

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_s + d\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{x} ,$$

wobei $d\mathbf{r}_s$ die Verschiebung des Schwerpunktes und \mathbf{x} die Lage des Punktes in \tilde{K} bezeichnet. Für die Geschwindigkeit von P gilt dann:

$$\mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_s}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} \times \mathbf{x} \equiv \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} .$$

Nach der obigen Gleichung gilt für die Geschwindigkeit eines Aufpunktes P , dass man sie in eine Translation mit Geschwindigkeit \mathbf{V} und eine Rotation mit Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ zerlegen kann, wobei $\boldsymbol{\omega}$ die Winkelgeschwindigkeit in K bezeichnet.

Bemerkung:

Die Winkelgeschwindigkeit hängt nicht von der Wahl von S ab. Für einen Bezugspunkt S' mit $\mathbf{r}'_s = \mathbf{r}_s + \mathbf{a}$ gilt:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}' + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{x}' .$$

Mit:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}'_s + \mathbf{x}' = \mathbf{r}_s + \underbrace{\mathbf{a} + \mathbf{x}'}_{=\mathbf{x}} \\ \rightarrow \mathbf{x} &= \mathbf{x}' + \mathbf{a} \end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} = \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}' \\ \rightarrow \mathbf{V}' &= \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}' . \end{aligned}$$

Es ist sinnvoll den Aufpunkt S in den Schwerpunkt zu legen. Für diskrete Massenverteilungen gilt dann für die kinetische Energie:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{v}^{(i)})^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}^{(i)})^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N m_i \right) V^2 + \mathbf{V} \cdot \sum_{i=1}^N m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}^{(i)}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}^{(i)})^2 . \end{aligned}$$

Mit:

$$\mathbf{V} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}^{(i)}) = \mathbf{x}^{(i)} \cdot (\mathbf{V} \times \boldsymbol{\omega})$$

gilt:

$$\mathbf{V} \cdot \sum_{i=1}^n m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}^{(i)}) = (\mathbf{V} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{x}^{(i)} = 0 ,$$

da wir S in den Schwerpunkt gelegt haben.

Wir betrachten nun den Term:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})^2 &= \boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{x}^2 \sin^2(\alpha) = \boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{x}^2 (1 - \cos^2(\alpha)) = \boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{x}^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x})^2 \\ &= \sum_{\mu, \nu=1}^3 \omega^\mu [\mathbf{x}^2 \delta_{\mu\nu} - x_\mu x_\nu] \omega^\nu . \end{aligned}$$

Wir können durch die Einführung des sogenannten **Trägheitstensors** $\underline{\underline{J}}$ den Ausdruck für die kinetische Energie vereinfachen:

$$T = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^3 \sum_{\nu=1}^3 \omega^\mu J_{\mu\nu} \omega^\nu .$$

mit:

$$J_{\mu\nu} := \sum_{i=1}^N m_i \left[(\mathbf{x}^{(i)})^2 \delta_{\mu\nu} - x_\mu^{(i)} x_\nu^{(i)} \right]$$

Im kontinuierlichen Fall ergibt sich:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \int d^3x \varrho(\mathbf{x}) (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})^2 \\
&= \frac{1}{2} V^2 \underbrace{\int d^3x \varrho(\mathbf{x})}_{=M} + (\mathbf{V} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \underbrace{\int d^3x \varrho(\mathbf{x}) \mathbf{x}}_{=\mathbf{S}=\mathbf{0}} \\
&\quad + \frac{1}{2} \int d^3x \varrho(\mathbf{x}) \omega^\mu [\mathbf{x}^2 \delta_{\mu\nu} - x_\mu x_\nu] \omega^\nu
\end{aligned}$$

Der Trägheitstensor J lautet für eine kontinuierliche Massenverteilung:

$$J_{\mu\nu} := \int d^3x \varrho(\mathbf{x}) [\mathbf{x}^2 \delta_{\mu\nu} - x_\mu x_\nu] .$$

Bemerkung:

J ist zeitabhängig, wenn sich die x_μ auf ein raumfestes Koordinatensystem beziehen.

Für die kinetische Energie gilt dann:

$$T = T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \underline{\underline{J}} \boldsymbol{\omega}$$

mit $M = \sum_{i=1}^N m_i$.

6.2 Eigenschaften des Trägheitstensors

Drehungen werden durch Matrizen $\underline{\underline{R}}$ beschrieben, die zur speziellen orthogonalen Gruppe im \mathbb{R}^3 ($SO(3)$) gehören. Damit gilt für die Drehmatrizen insbesondere:

$$\underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{R}} = \mathbb{1} .$$

Der Trägheitstensor enthält einen invarianten Anteil

$$\int \varrho(\mathbf{x}) \mathbf{x}^2 \delta_{\mu\nu} d^3x \tag{42}$$

und den Anteil

$$- \int d^3x \varrho(\mathbf{x}) x_\mu x_\nu , \tag{43}$$

der von der Wahl des Koordinatensystems abhängt. Die Invarianz von (42) ergibt sich aus der Eigenschaft $\underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{R}} = \mathbb{1}$, da

$$\sum_{\mu, \nu=1}^3 R_{\tau\mu} R_{\sigma\nu} \delta_{\mu\nu} = \sum_{\mu=1}^3 R_{\tau\mu} (R^T)_{\mu\sigma} = \delta_{\tau\sigma} .$$

$\underline{\underline{J}}$ ist eine reelle, symmetrische Matrix, die man diagonalisieren kann. Es gilt:

$$\underline{\underline{R}}_0 \underline{\underline{J}} \underline{\underline{R}}_0^{-1} = \underline{\underline{J}}^0 = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} .$$

In einem geeigneten Koordinatensystem ist $\underline{\underline{J}}^0$ also diagonal. Dann gilt:

$$\underline{\underline{J}}^0 = \int d^3y \varrho(\mathbf{y}) \begin{bmatrix} y_2^2 + y_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & y_3^2 + y_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & y_1^2 + y_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow I_i \geq 0 \quad \text{für } i = 1, 2, 3 \quad \text{und} \quad I_1 + I_2 \geq I_3 \quad \text{und zyklisch.}$$

Beispiel: Bestimmung des Trägheitstensors für einen Quader mit Seitenlängen a, b, c und homogener Massendichte ρ :

$$\begin{aligned} J_{ij} &= \varrho \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-c/2}^{c/2} d^3x [\mathbf{x}^2 \delta_{ij} - x_i x_j] \\ \rightarrow J_{11} &= \varrho \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-c/2}^{c/2} d^3x [y^2 + z^2] \\ &= \varrho a \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-c/2}^{c/2} d^2x [y^2 + z^2] \\ &= \varrho a \int_{-c/2}^{c/2} \left(\frac{1}{3} \frac{b^3}{4} + bz^2 \right) dz \\ &= \frac{1}{3} \varrho abc \left(\frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} \right) = \frac{1}{12} M (b^2 + c^2) \end{aligned}$$

analog:

$$J_{22} = \frac{M}{2} (a^2 + c^2) \quad \text{und} \quad J_{33} = \frac{M}{2} (a^2 + b^2)$$

$$\begin{aligned} J_{12} &= -\varrho \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-c/2}^{c/2} d^3x xy \\ &= -\varrho c \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} dx dy xy = 0 \end{aligned}$$

und analog:

$$J_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j .$$

Die Eigenwerte I_i des Trägheitstensors nennt man **Hauptträgheitsmomente**. Sind alle Trägheitsmomente verschieden, so spricht man von einem un-symmetrischen Kreisel, für $I_1 = I_2 \neq I_3$ von einem symmetrischen und für $I_1 = I_2 = I_3$ von einem Kugelkreisel.

6.3 Der Satz von Steiner

Es sei J der Trägheitstensor im körperfesten System \tilde{K} , dessen Ursprung S im Schwerpunkt liegt. \tilde{K}' sei ein System, das gegenüber \tilde{K} um einen festen Vektor \mathbf{a} verschoben ist. J' sei der Trägheitstensor in \tilde{K}' . Dann gilt:

$$J'_{\mu\nu} = J_{\mu\nu} + M [\mathbf{a}^2 \delta_{\mu\nu} - a_\mu a_\nu] .$$

Der Drehimpuls des starren Körpers kann in den Drehimpuls des Schwerpunkts (abhängig von der Wahl des Koordinatensystems) und den Relativedrehimpuls zerlegt werden.

Im diskreten Fall gilt:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i \times \dot{\mathbf{x}}_i ,$$

wobei die \mathbf{x}_i die Ortsvektoren im körperfesten System sind.

Im kontinuierlichen Fall gilt:

$$\mathbf{L} = \int d^3x \varrho(\mathbf{x}) \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}} \quad \rightarrow \quad \mathbf{L} = \underline{\underline{J}} \boldsymbol{\omega} .$$

Bemerkung:

\mathbf{L} ist nur dann parallel zu $\boldsymbol{\omega}$, wenn $\boldsymbol{\omega}$ parallel zu einer der drei Hauptachsen gewählt wird. Man kann nun auch die Rotationsenergie in die Form:

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \mathbf{L}$$

bringen. Ist $\boldsymbol{\omega}$ parallel zu einer der Hauptachsen, so gilt:

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_i \boldsymbol{\omega}^2 .$$

6.4 Kräftefreie Bewegung von starren Körpern

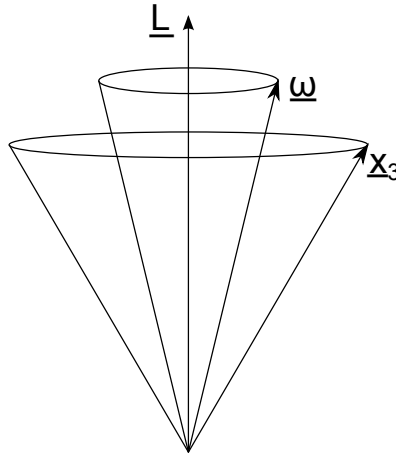


Abbildung 16: Spur- und Nutationskegel.

Ohne äußere Kräfte ist der Drehimpuls \mathbf{L} erhalten, das heißt:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\omega} \underline{J} \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}) = 0 .$$

Kugelkreisel haben einen diagonalen Trägheitstensor mit $I_i = I$,

$$\rightarrow \mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{I}\mathbf{L} .$$

Für symmetrische Kreisel gelte $I_1 = I_2 \neq I_3$. \mathbf{L} sei gegeben. Die 1-Achse werde in die durch \mathbf{L} und die 3-Achse aufgespannte Ebene gelegt. Die 2-Achse steht senkrecht auf der Ebene:

$$\rightarrow L_2 = 0 \quad \text{und} \quad \omega_2 = 0 .$$

Damit liegt auch $\boldsymbol{\omega}$ in der 1-3-Ebene.

Wenn der Drehimpuls und die 3-Achse zusammenfallen dreht sich der Kreisel mit konstanter Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega_3 = \frac{|\mathbf{L}|}{I_3} .$$

Fallen Drehimpuls und 3-Achse nicht zusammen, so zerlegen wir $\boldsymbol{\omega}$ in eine Komponente $\boldsymbol{\omega}_{\text{prä}} \parallel \mathbf{L}$ und eine Komponente $\boldsymbol{\omega}_{\text{symm}} \parallel$ 3-Achse, also:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\text{prä}} + \boldsymbol{\omega}_{\text{symm}} .$$

Dann gilt:

$$\mathbf{v}_{(3)} = \boldsymbol{\omega}_{\text{prä}} \times \mathbf{r}_{(3)} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{(3)}$$

für die Geschwindigkeiten von Punkten, die auf der 3-Achse liegen. $\mathbf{v}_{(3)}$ steht senkrecht auf der Ebene von \mathbf{L} , $\boldsymbol{\omega}$ und z .

Die Symmetrieachse präzediert um \mathbf{L} . Auch $\boldsymbol{\omega}$ präzediert um \mathbf{L} . $\boldsymbol{\omega}$ überstreicht den **Spurkegel**, die Symmetrieachse den **Nutationskegel**.

6.5 Die Eulerschen Gleichungen

Die Bewegung eines starren Körpers setzt sich aus einer Translation und einer Rotation um einen beliebigen Ursprung zusammen. Wenn der Körper nicht festgehalten wird, legt man den Schwerpunkt zweckmäßigerweise in den Ursprung.

Für ein System mit N Massenpunkten gilt offenbar:

$$\mathbf{r}_s = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \quad \rightarrow \quad M \ddot{\mathbf{r}}_s = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(a)} \equiv \mathbf{F}^{(a)},$$

wobei $\mathbf{F}_i^{(a)}$ die äußere Kraft bezeichnet, die auf die i -te Masse wirkt. Für den Gesamtdrehimpuls gilt dann:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{L} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i \right) = \sum_{i=1}^N m_i \underbrace{(\dot{\mathbf{r}}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i)}_{=0} + m_i \mathbf{r}_i \times \ddot{\mathbf{r}}_i \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(a)} \equiv \mathbf{N}. \end{aligned} \quad (44)$$

Der Gesamtdrehimpuls \mathbf{L} und das Gesamtdrehmoment \mathbf{N} beziehen sich auf ein Inertialsystem.

Die Beziehung $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N}$ gilt aber auch, wenn sich \mathbf{L} , \mathbf{N} auf den mitbewegten Schwerpunkt des starren Körpers beziehen.

Der Schwerpunkt führt also eine Translationsbewegung durch, daher ist es sinnvoll den Ortsvektor \mathbf{r}_i zu zerlegen:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_s + \mathbf{r}'_i.$$

Damit gilt auch:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}_i &= \ddot{\mathbf{r}}_s + \ddot{\mathbf{r}}'_i, \\ \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i &= 0 \quad (\text{da der Schwerpunkt bei } \mathbf{r}'_i = 0 \text{ liegt}), \\ \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}'_i &= 0.\end{aligned}$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \mathbf{L} &= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^N m_i [(\mathbf{r}_s + \mathbf{r}'_i) \times (\ddot{\mathbf{r}}_s + \ddot{\mathbf{r}}'_i)] \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_s \times \ddot{\mathbf{r}}_s + \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \times \ddot{\mathbf{r}}_s}_{=0} - \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}'_i \times \mathbf{r}_s}_{=0} + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \times \ddot{\mathbf{r}}'_i \\ &\stackrel{(44)}{=} \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_s \times \mathbf{F}_i^{(a)} + \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^{(a)},\end{aligned}$$

so dass mit:

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_s = \sum_i \mathbf{F}_i^{(a)}$$

folgt:

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \times \ddot{\mathbf{r}}'_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \times \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^{(a)}$$

beziehungsweise:

$$\dot{\mathbf{L}}'_s = \mathbf{N}'_s.$$

Diese Form des Drehimpulssatzes ist nützlich, weil Drehimpuls und Drehmoment im Schwerpunktsystem leichter zu berechnen sind.

Bemerkung:

Wir betrachten nun ausschließlich mitbewegte Koordinatensysteme, so dass wir auf die „'“ im Folgenden verzichten.

Es bleibt nun die Aufgabe die Bewegungsgleichung im körperfesten Koordinatensystem darzustellen. Dann gilt:

$$\dot{\mathbf{L}}_s = \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \right] = \frac{d}{dt} J \boldsymbol{\omega} \equiv \frac{d}{dt} \sum_{i,j} J_{ij} \omega_j \mathbf{e}_i,$$

wobei die ω_j die körperfesten Koordinaten von $\boldsymbol{\omega}$ sind und die \mathbf{e}_i die Basisvektoren des körperfesten Systems bezeichnen.

Mit $\dot{\mathbf{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i$ gilt:

$$\dot{\mathbf{L}}_s = \sum_{i,j} J_{ij} \dot{\omega}_j \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times \sum_{i,j} J_{ij} \omega_j \mathbf{e}_i .$$

Mit der Ableitung des Drehimpulses im körperfesten System:

$$\sum_{i,j} J_{ij} \dot{\omega}_j \mathbf{e}_i = \frac{\tilde{\text{d}}}{\text{d}t} \mathbf{L}_s$$

gilt dann:

$$\dot{\mathbf{L}}_s = \frac{\tilde{\text{d}}}{\text{d}t} \mathbf{L}_s + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{N}_s ,$$

wobei wir die Vektoren $\mathbf{L}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{N}_s$ in der körperfesten Basis darstellen können. Damit haben wir eine Bewegungsgleichung für den starren Körper gefunden, für die \underline{J} zeitlich konstant ist.

Wenn die körperfesten Achsen \mathbf{e}_i Hauptträgheitsachsen sind, ergeben sich aus $L_i = I_i \omega_i$ die **Eulerschen Gleichungen**:

$$I_i \dot{\omega}_i - (I_j - I_k) \omega_j \omega_k = N_i \quad (i, j, k \text{ zyklisch}).$$

6.6 Die Eulerschen Winkel

Durch die **Eulerschen Winkel** wird die Orientierung des körperfesten Koordinatensystems festgelegt.

Dazu drehen wir das Koordinatensystem um φ um die z_I -Achse (K-System $\hat{\mathbf{r}}$). Damit verläuft die x-Achse nun entlang der Linie \overline{ON} . Wir kippen dann das System entlang der Linie \overline{ON} (also der x-Achse) um den Winkel ϑ , so dass zwischen z_I -Achse und z-Achse ein Winkel ϑ eingeschlossen ist. Schließlich wird das System um die z-Achse gedreht (Winkel ψ).

Bemerkung:

Die Drehungen sind nicht kommutativ!

Wir betrachten nun den Zusammenhang zwischen $\boldsymbol{\omega}_I$ und $\boldsymbol{\omega}$, der durch die Eulerwinkel hergestellt werden kann. Es gilt:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_\varphi + \boldsymbol{\omega}_\vartheta + \boldsymbol{\omega}_\psi .$$

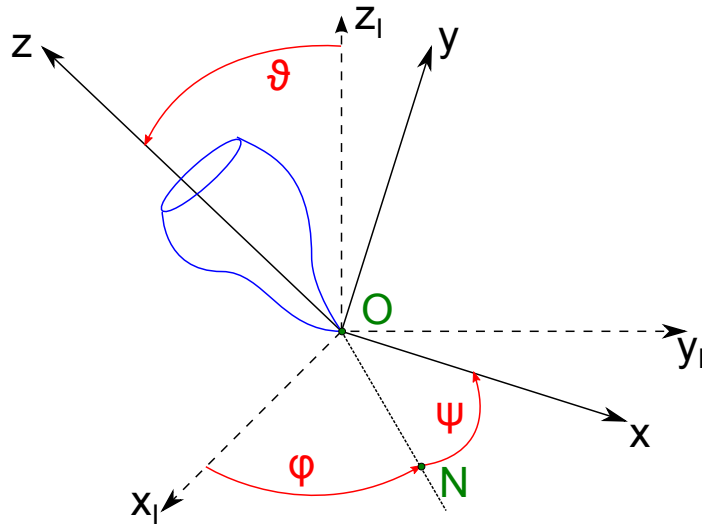


Abbildung 17: Die Eulerschen Winkel.

$$1) \quad \boldsymbol{\omega}_{\varphi_I} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \boldsymbol{\omega}_{\varphi} &= \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta) \\ 0 & -\sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \\ &= \dot{\varphi} \begin{pmatrix} \sin(\psi) \sin(\vartheta) \\ \cos(\psi) \sin(\vartheta) \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2) $\boldsymbol{\omega}_{\vartheta}$ hat im gedrehten System $\hat{\mathbf{r}}$ die Form:

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{\vartheta} = \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\omega}_{\vartheta} = \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \cos(\psi) \\ -\dot{\vartheta} \sin(\psi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

und schließlich $\boldsymbol{\omega}_{\psi} = \dot{\psi} \mathbf{e}_z$ im körperfesten System.

Damit ergibt sich insgesamt:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta) \sin(\psi) \dot{\varphi} + \cos(\psi) \dot{\vartheta} \\ \sin(\vartheta) \cos(\psi) \dot{\varphi} - \sin(\psi) \dot{\vartheta} \\ \cos \vartheta \dot{\varphi} + \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

Die Beziehung ergibt sich auch direkt aus der Projektion von $\boldsymbol{\omega}_\varphi, \boldsymbol{\omega}_\vartheta, \boldsymbol{\omega}_\psi$ auf die körperfesten Achsen.

Beispiel: Kräftefreier symmetrischer Kreisel

Aus $\mathbf{N} = 0$ und $I_1 = I_2$ folgt direkt:

$$I_3 \dot{\omega}_3 = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_3 = \text{const.}$$

Für die ersten beiden Gleichungen ergibt sich:

$$\dot{\omega}_1 + \bar{\omega} \omega_2 = 0 \quad \text{und} \quad \dot{\omega}_2 - \bar{\omega} \omega_1 = 0 ,$$

wobei:

$$\bar{\omega} = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3$$

$$\rightarrow \omega_1(t) = A \cos(\bar{\omega}t + \alpha) \quad ; \quad \omega_2(t) = A \sin(\bar{\omega}t + \alpha)$$

Für die Euler-Winkel gilt dann:

$$\begin{pmatrix} A \cos(\bar{\omega}t + \alpha) \\ A \sin(\bar{\omega}t + \alpha) \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta) \sin(\psi) \dot{\varphi} + \cos(\psi) \dot{\vartheta} \\ \sin(\vartheta) \cos(\psi) \dot{\varphi} - \sin(\psi) \dot{\vartheta} \\ \cos(\vartheta) \dot{\varphi} + \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

Wir machen nun den Ansatz $\vartheta(t) = \text{const} = \vartheta_0$.

$$\rightarrow \sin(\vartheta_0) \dot{\varphi} = \pm A \quad \text{bzw.} \quad \varphi(t) = \pm \frac{A}{\sin(\vartheta_0)} t + \varphi_0$$

$$\Rightarrow \omega_{\text{prä}} = \dot{\varphi} = \pm \frac{A}{\sin(\vartheta_0)}$$

Wir erhalten ferner :

$$\psi(t) = -\bar{\omega}t - \alpha \pm \frac{\pi}{2} .$$

Damit sind die Winkel des symmetrischen Kreisels festgelegt.

Zum Abschluss wollen wir noch die Lagrangefunktion im körperfesten System angeben, so dass $L = T - U = T_{\text{rot}} - U$, wobei:

$$T_{\text{rot}} = \frac{I_1}{2} \left(\dot{\vartheta} \cos(\psi) + \dot{\varphi} \sin(\vartheta) \sin(\psi) \right)^2$$

$$+ \frac{I_2}{2} \left(-\dot{\vartheta} \sin(\psi) + \dot{\varphi} \sin(\vartheta) \cos(\psi) \right)^2$$

$$+ \frac{I_3}{2} \left(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos(\vartheta) \right)^2 .$$

Für den symmetrischen Kreisel ($I_1 = I_2$) vereinfacht sich die Lagrangefunktion, da:

$$T_{\text{rot}} = \frac{I_1}{2} \left(\dot{\varphi}^2 \sin^2(\vartheta) + \dot{\vartheta}^2 \right) + \frac{I_3}{2} \left(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos(\vartheta) \right)^2 .$$