

**Praktikumsanleitung
zum Versuch
“Schiefe Biegung“**

Prof. Dr.-Ing. Stefan Diebels
Dr.-Ing. Joachim Schmitt

Universität des Saarlandes
Lehrstuhl für Technische Mechanik



©2010

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
1.1	Spannungs-Dehnungs-Beziehungen unter gerader Biegung	3
1.2	Zusammenhang mit den Schnittgrößen	6
1.3	Vernachlässigung des Schubeinflusses	8
1.4	Biegelinie	10
1.5	Flächenträgheitsmomente	25
1.5.1	Flächenmomente 1. Ordnung	25
1.5.2	Flächenmomente 2. Ordnung	26
1.5.3	Verschiebung des Bezugssystems	27
1.5.4	Drehung des Bezugssystems	30
1.6	Schiefe Biegung	33
2	Praktische Aufgabenstellung	37

1 Theorie

1.1 Spannungs-Dehnungs-Beziehungen unter gerader Biegung

Als Balken versteht man ein schlankes Bauteil, das senkrecht zu seiner Längsachse belastet wird. Ziel ist es, einen Zusammenhang zwischen der äußeren Belastung, den inneren Spannungen und der Durchbiegung des Balkens zu entwickeln. Zur Herleitung einer technischen Biegelehre sind einige Annahmen bezüglich der Kinematik eines Balkens erforderlich, die im Weiteren diskutiert werden.

Folgende Grundannahmen charakterisieren die sogenannte gerade Biegung:

- Der betrachtete Balken ist gerade. Seine Querschnittsfläche senkrecht zur Balkenachse ist ggf. veränderlich, $A = A(x_1)$, aber sie besitzt zumindest eine Symmetrieachse, vgl. Abb. 1.

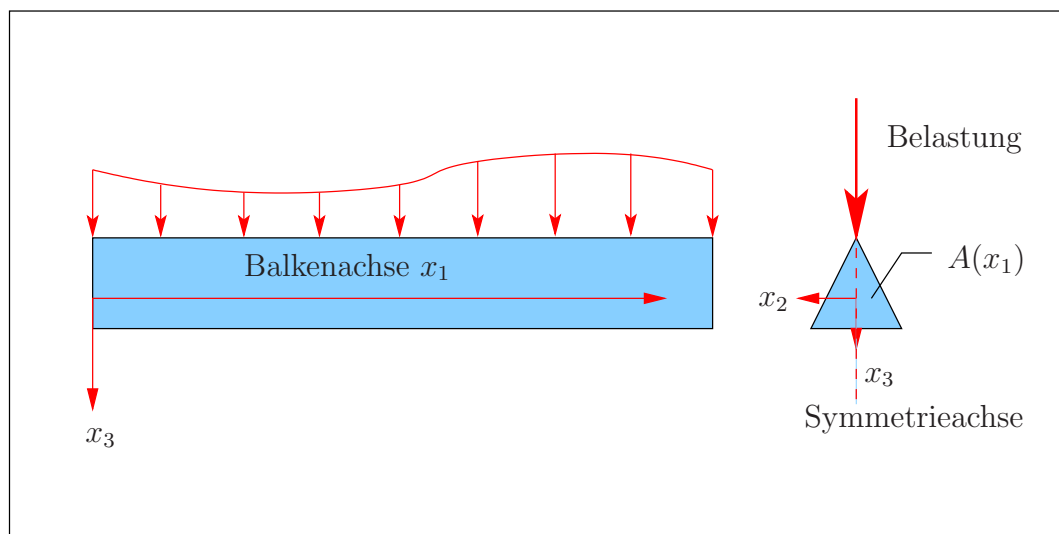


Abbildung 1: Bezeichnungen am Balken

- Die Belastung wirkt entlang der Symmetrieachse des Balkenquerschnitts.
- Das gewählte Bezugssystem ist ein Hauptträgheitsachsensystem (Bedeutung kommt noch).

Als Konsequenz dieser Annahmen sind Belastungs- und Verformungsebene identisch.

Eine weitere Annahme betrifft die Spannungsverteilung:

- Normalspannungen wirken nur in Richtung der Balkenachse, Normalspannungen senkrecht zur Balkenachse werden vernachlässigt.

Wesentlich zur Ermittlung der Spannungsverteilung in der Balkenquerschnittsfläche $A(x_1)$ sind die Annahmen über die Kinematik. Folgende Verformung wird zu Grunde gelegt:

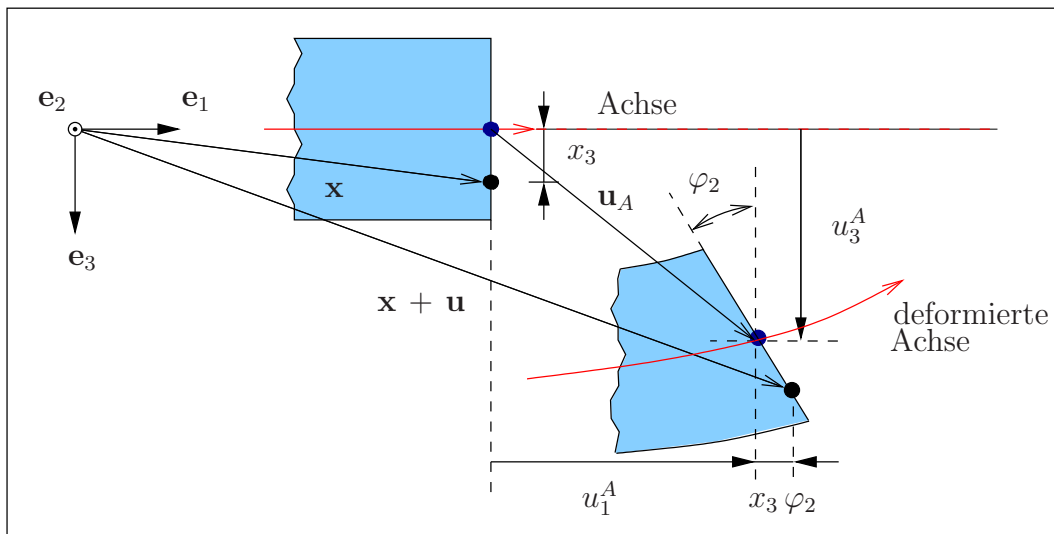


Abbildung 2: Deformierter Balken

Ein beliebiger Punkt im Querschnitt des Balkens verschiebt sich gemäß Abb. 2 von der Ausgangsposition \mathbf{x} in die Position $\mathbf{x} + \mathbf{u}$, wobei die Verschiebung $\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i$ nur in der \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 -Ebene stattfindet und von x_2 unabhängig ist:

$$\mathbf{u} = u_1(x_1, x_3) \mathbf{e}_1 + u_3(x_1, x_3) \mathbf{e}_3. \quad (1.1)$$

Die x_1 -Achse entspricht dabei der geforderten Symmetrielinie.

Für schlanke Balken gilt weiterhin die Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte. Demnach bleibt ein ursprünglich ebener Querschnitt auch nach der Deformation eben. Er kann dann nur gegenüber der Balkenachse um den Winkel $\varphi_2(x_1)$ gedreht sein. Diese Hypothese geht auf Jakob Bernoulli (1654–1705) zurück und wird daher auch als 1. Bernoulli-Hypothese bezeichnet.

Mit dieser Annahme kann der Verschiebungszustand durch die Verschiebung \mathbf{u}_A des Referenzpunktes auf der Balkenachse und durch die Verdrehung φ_2

der Querschnittsfläche dargestellt werden. Es gilt unter der Annahme kleiner Rotationen

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_3) &= u_1^A(x_1) + \varphi_2(x_1) x_3 =: u_1(x_1) + \varphi_2(x_1) x_3 \\ u_3(x_1) &= u_3^A(x_1) =: w(x_1). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Bemerkung:

Man spricht von kleinen Rotationen, wenn die trigonometrischen Funktionen in guter Näherung durch die ersten Glieder einer Taylor-Reihe beschrieben werden.

$$\sin \varphi_2 \approx \varphi_2, \quad \cos \varphi_2 \approx 1. \quad (1.3)$$



In der technischen Literatur ist es üblich, die Verschiebungen der Balkenachse im Rahmen der Balkentheorie mit $u = u_1^A$ und $w = u_3^A$ zu bezeichnen. Da alle Punkte in einem Querschnitt die gleiche Absenkung $w(x_1)$ erfahren, ändert der Balken durch die Deformation seine Dicke nicht.

Wenn man von dem Verschiebungszustand (1.2) ausgeht, ergeben sich die folgenden Verzerrungen im Inneren des Balkens:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{du}{dx_1} + \frac{d\varphi_2}{dx_1} x_3 \\ \varepsilon_{31} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx_1} + \varphi_2 \right). \end{aligned} \quad (1.4)$$

In Kombination mit dem Materialgesetz der linearen Elastizität folgt die Spannungsverteilung in Richtung der Balkenachse zu

$$\sigma_{11} = E \varepsilon_{11} = E \left(\frac{du}{dx_1} + \frac{d\varphi_2}{dx_1} x_3 \right) \quad (1.5)$$

und senkrecht dazu

$$\sigma_{31} = 2G \varepsilon_{31} = G \left(\frac{dw}{dx_1} + \varphi_2 \right). \quad (1.6)$$

Die Parameter sind der Elastizitätsmodul $E = \frac{\mu(2\mu+3\lambda)}{\mu+\lambda}$ und der Schubmodul $G = \mu$. Die Normalspannung in dem betrachteten Querschnitt ist nach (1.5) linear verteilt, während die Schubspannung nach (1.6) im Querschnitt konstant ist.

Aufgrund der kinematischen Annahmen erfolgt keine Dickenänderung, und somit existieren keine Normalspannungen σ_{33} senkrecht zur Balkenachse.

1.2 Zusammenhang mit den Schnittgrößen

Aus der Spannungsverteilung in der Balkenquerschnittsfläche können nun die Schnittgrößen durch Integration über die Fläche $A(x_1)$ ermittelt werden.

Für die Resultierenden der Schnittgrößen gelten die folgenden Definitionen, die einen Zusammenhang zwischen den Schnittgrößen und den Spannungen herstellen

$$\begin{aligned} N_1 &= \int_A \sigma_{11} dx_2 dx_3, \\ Q_3 &= \int_A \sigma_{31} dx_2 dx_3, \\ M_2 &= \int_A \sigma_{11} x_3 dx_2 dx_3. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Dagegen erhält man bei der Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen einen Zusammenhang zwischen den Schnittgrößen und der Belastung

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dx_1} &= -n_1, \\ \frac{dQ_3}{dx_1} &= -q_3, \\ \frac{dM_2}{dx_1} &= Q_3. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Am geraden Balken sind das Zug- und das Biegeproblem entkoppelt. Wählt man die Balkenachse durch die Flächenschwerpunkte der Querschnittsflächen¹, so folgt aus Kombination von (1.5) mit (1.7)_{1,3}

$$\begin{aligned} N_1 &= \int_A E \left(\frac{du}{dx_1} + \frac{d\varphi_2}{dx_1} x_3 \right) dx_2 dx_3 = A E \frac{du}{dx_1}, \\ M_2 &= \int_A E \left(\frac{du}{dx_1} + \frac{d\varphi_2}{dx_1} x_3 \right) x_3 dx_2 dx_3 = E \frac{d\varphi_2}{dx_1} \int_A x_3^2 dx_2 dx_3, \end{aligned} \quad (1.9)$$

d. h. die Normalkraft N_1 im Balken wird nur durch die achsiale Verschiebung $u(x_1)$ der Querschnittsfläche hervorgerufen, das Moment M_2 nur durch das Verkippen $\varphi_2(x_1)$ des Querschnitts.

Betrachtet man den Fall reiner Biegung, $N_1 = 0$, $u = \text{konst.}$, so ergibt sich

¹Im Flächenschwerpunkt gilt $\int_A x_3 dx_2 dx_3 = 0$, siehe Formel zur Berechnung des Flächenschwerpunkts.

der Zusammenhang zwischen dem Biegemoment und der Normalspannung zu

$$M_2 = E \frac{d\varphi_2}{dx_1} \int_A x_3^2 da = \frac{\sigma_{11}(x_1, x_3)}{x_3} I_{22}. \quad (1.10)$$

Dabei wurde das sogenannte Flächenträgheitsmoment als

$$I_{22} = \int_A x_3^2 dx_2 dx_3 \quad (1.11)$$

eingeführt. Das Flächenträgheitsmoment ist eine rein geometrische Größe. Die lineare Spannungsverteilung unter reiner Biegung kann nun direkt aus dem angreifenden Biegemoment ermittelt werden zu

$$\sigma_{11} = \frac{M_2}{I_{22}} x_3. \quad (1.12)$$

Die maximalen Biegenormalspannungen ergeben sich demnach am Rand des Balkens, wenn x_3 extremal wird. Die Beträge der Randspannungen können über das Widerstandsmoment W_{22} ermittelt werden:

$$|\sigma_{11}| = \frac{M_2}{W_{22}} \quad \text{mit} \quad W_{22} = \frac{I_{22}}{x_{3,\text{Rand}}}. \quad (1.13)$$

Für den Fall, dass der Balken sowohl durch Momente als auch durch Normalkräfte belastet wird, überlagern sich nach dem Superpositionsprinzip die Spannungsanteile wie in Abb. 3 skizziert. Für die Normalspannung im Balkenquerschnitt ergibt sich dann

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}^N + \sigma_{11}^M = \frac{N_1}{A} + \frac{M_2}{I_{22}} x_3. \quad (1.14)$$

Durch die Überlagerung der konstanten Spannungsverteilung aufgrund von Normalkraft und der linearen Spannungsverteilung aufgrund von Biegung verschiebt sich gegenüber der reinen Biegung der Nulldurchgang der Spannungsverteilung von der Mitte des Querschnitts hin zum Rand. Die Stelle, an der die Spannungsverteilung zu Null wird, bezeichnet man als die neutrale Faser. Für ihre Lage gilt

$$\sigma_{11} = 0 \quad \rightarrow \quad x_3^N = -\frac{N_1 I_{22}}{M_2 A}. \quad (1.15)$$

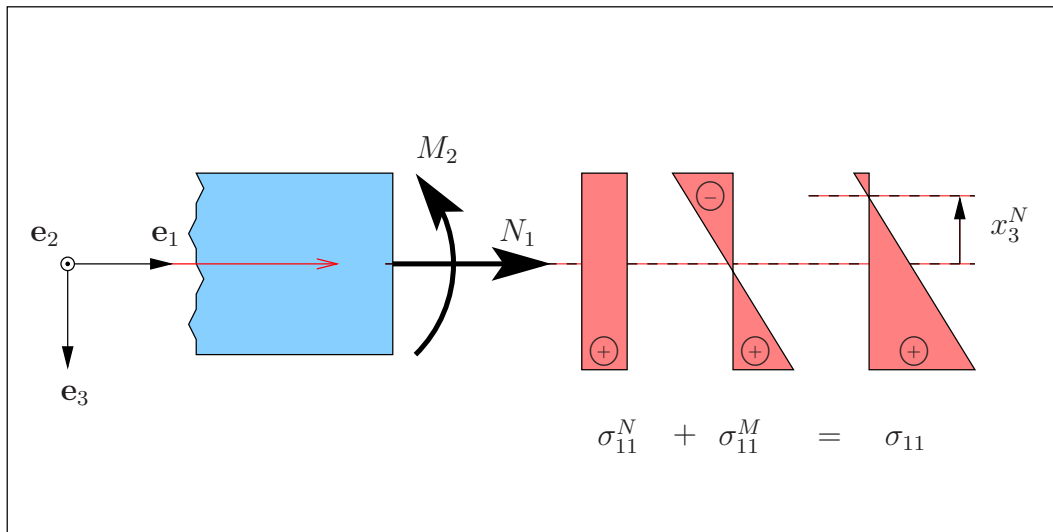


Abbildung 3: Spannungsverteilung bei Zug- und Biegebeanspruchung

1.3 Vernachlässigung des Schubeinflusses

Mit der angenommenen Balkenkinematik folgt aus der 1. Bernoullischen Hypothese (Ebenbleiben der Querschnitte) eine konstante Verteilung der Schubspannungen über die Balkenhöhe

$$\sigma_{31} = G \left(\frac{dw(x_1)}{dx_1} + \varphi_2(x_1) \right). \quad (1.16)$$

Insbesondere am Rand kann diese Aussage aufgrund der Zuordnung der Schubspannungen

$$\sigma_{31} = \sigma_{13} \quad (1.17)$$

nicht richtig sein, da die Balkenoberfläche nicht durch Tangentialkräfte belastet ist. Dieser Fehler ist eine Konsequenz des einschränkenden Ansatzes in Folge der 1. Bernoulli-Hypothese.

Bei langen, schlanken Balken ($l/h > 10$) kann man den Schubeinfluss häufig vollständig vernachlässigen. In diesem Fall begeht man bewusst einen zweiten Fehler, indem man fordert

$$\varphi_2(x_1) = - \frac{dw(x_1)}{dx_1}. \quad (1.18)$$

Diese Forderung entspricht der 2. Bernoullischen Annahme vom Senkrechtbleiben der Querschnitte: Ein Querschnitt, der vor der Belastung senkrecht zur Balkenachse liegt, steht auch nach der Belastung senkrecht auf der deformierten Achse, vgl. Abb. 4.

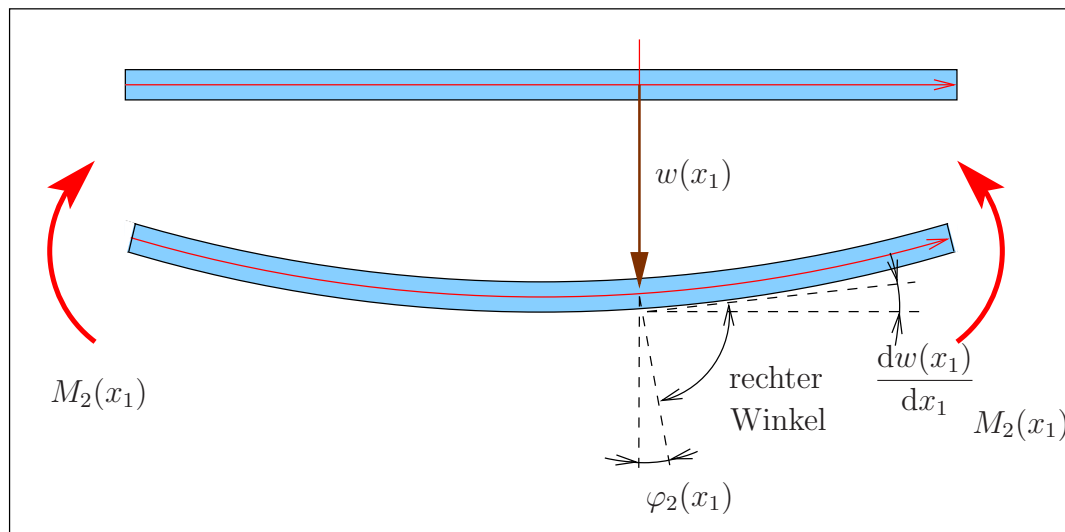


Abbildung 4: Biegewinkel

Ein Balken, auf den die beiden Bernoulli-Annahmen zutreffen, wird auch als Bernoulli-Balken bezeichnet. Die ursprünglich freie Verdrehung φ_2 des Querschnitts wird durch die 2. Bernoulli-Annahme an die Durchbiegung der Balkenmittellachse, d. h. an die Ableitung der Biegelinie, gekoppelt. Dadurch entfallen die Schubspannungen nach (1.16), d. h. für einen Bernoulli-Balken kann man die Schubspannung nicht aus der Kinematik und dem Stoffgesetz berechnen. Dies ist eine Konsequenz der restriktiven Annahmen bezüglich der Balkenkinematik. Wir werden später eine Gleichgewichtsbetrachtung durchführen, um den Schubspannungsverlauf in der Querschnittsfläche zu approximieren.

Für den Bernoulli-Balken berechnet sich die Achsialverschiebung $u_1(x_1, x_3)$ gemäß (1.2) und (1.18) als

$$u_1 = u(x_1) + \varphi_2(x_1) x_3 = u(x_1) - \frac{dw(x_1)}{dx_1} x_3. \quad (1.19)$$

Bemerkung:

Obwohl die beiden Bernoulli-Hypothesen die Kinematik stark einschränken und somit gewisse Widersprüche auftreten, stellt man in vielen Anwendungen fest, dass der Ansatz zu relativ guten Resultaten führt. Für kurze Balken muss jedoch der Schubeinfluss berücksichtigt werden. Die Querschnitte bleiben dann nicht senkrecht zur deformierten Achse². ■

²Dies führt zur Timoshenko-Theorie, die jedoch hier nicht behandelt wird.

1.4 Biegelinie

Gesucht wird der Zusammenhang zwischen Durchbiegung und Belastung am Bernoulli-Balken. Da am geraden Balken das Zug- und das Biegeproblem entkoppelt sind, wird im Weiteren nur der Einfluss der Querkräfte und Momente untersucht. Effekte durch die Normalkräfte können superponiert werden.

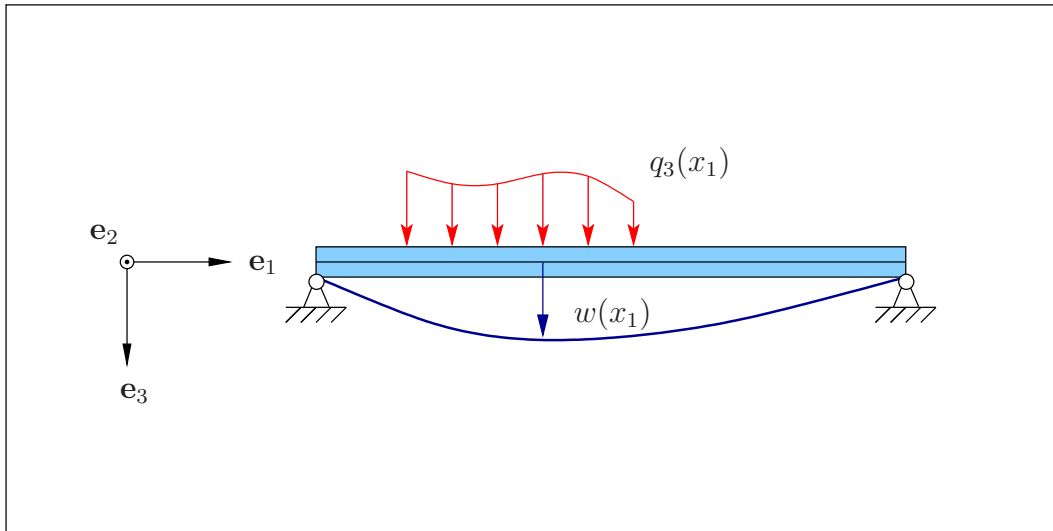


Abbildung 5: Biegelinie

Die Gleichgewichtsbedingungen an einem Balkenelement liefern den differentiellen Zusammenhang zwischen den Schnittgrößen Q_3 und M_2 und der Belastung $q_3(x_1)$ (vgl. TM I, Kapitel 6) in folgender Form

$$\frac{dQ_3}{dx_1} = -q_3(x_1), \quad \frac{dM_2}{dx_1} = Q_3(x_1). \quad (1.20)$$

Mit der Abkürzung $d(\dots)/dx_1 = (\dots)'$ lautet der Zusammenhang zwischen Belastung q_3 und Schnittmoment M_2

$$M_2'' = -q_3. \quad (1.21)$$

Die Integration von (1.21) mit den zugehörigen Randbedingungen löst das statisch bestimmte Problem. Zwischen dem Schnittmoment und der Balkenlängsspannung besteht nach (1.10) der Zusammenhang

$$\sigma_{11} = \frac{M_2}{I_{22}} x_3 = E \varepsilon_{11}. \quad (1.22)$$

Aufgrund der getroffenen kinematischen Annahmen (Senkrecht- und Ebenbleiben der Querschnitte) ergibt sich für den Bernoulli-Balken unter reiner Biegung

$$(u_1^A = 0)$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{du_1}{dx_1} = -\frac{d^2w}{dx_1^2} x_3. \quad (1.23)$$

Die Kombination von (1.22) und (1.23) liefert

$$E I_{22} w'' = -M_2, \quad (1.24)$$

so dass sich mit (1.21) schließlich die Differentialgleichung

$$(E I_{22} w'')'' = q_3(x_1) \quad (1.25)$$

ergibt. Die Größe $E I_{22}$ heißt Biegesteifigkeit.

Während für das statisch bestimmte Problem die Schnittgrößen und die Balkendurchbiegung getrennt voneinander nach (1.21) und (1.24) mit den jeweiligen Randbedingungen berechnet werden können, muss für ein statisch unbestimmtes Problem die Berechnung gekoppelt nach (1.25) erfolgen.

Folgende Randbedingungen können angegeben werden, vgl. Abb. 6:

- Gelenkige Lagerung

$$w = 0, \quad M_2 = -E I_{22} w'' = 0. \quad (1.26)$$

- Einspannung

$$w = 0, \quad w' = -\varphi = 0. \quad (1.27)$$

- Belastetes Ende

$$M_2 = -E I_{22} w'' = \bar{M}, \quad Q_3 = -E I_{22} w''' = \bar{Q}. \quad (1.28)$$

- Freies Ende als Sonderfall

$$M_2 = M = 0, \quad Q_3 = Q = 0. \quad (1.29)$$

Bemerkung:

An einem Balkenende kann entweder eine Kraft oder eine Verschiebung vorgegeben werden, jedoch nicht beides gleichzeitig. Analog gilt, dass entweder ein Moment oder eine Verdrehung vorgegeben werden kann, jedoch nicht beides gleichzeitig. Es ist jedoch z. B. möglich, gleichzeitig eine Kraft und eine Verdrehung vorzugeben. ■

Im Fall von Unstetigkeiten, z. B. Einzelkräften oder Einzelmomenten, sprunghaften Änderungen von q_3 oder $E I_{22}$, muss das Problem in mehrere Abschnitte

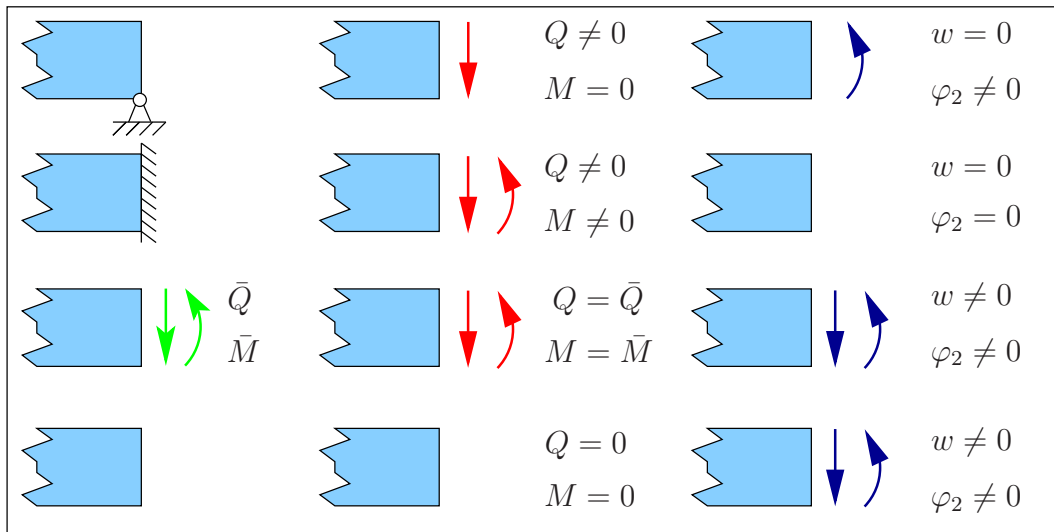


Abbildung 6: Mögliche Randbedingungen

unterteilt werden, an deren Grenzen Übergangsbedingungen formuliert werden müssen. Die differentielle Beziehung (1.25) gilt dann abschnittsweise. Beispiele für die Durchbiegung unterschiedlich belasteter Balken sind in Abb. 7.



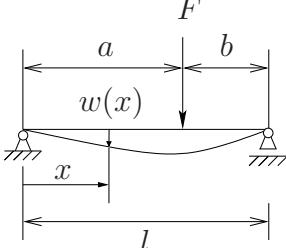
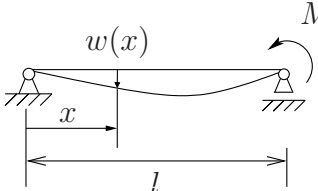
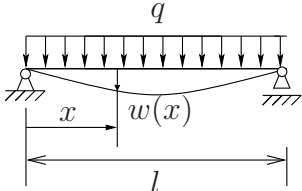
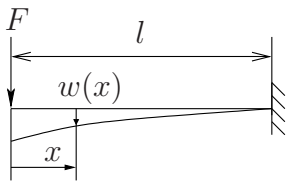
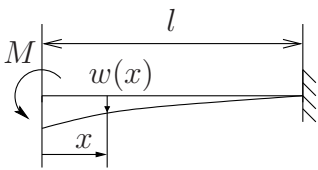
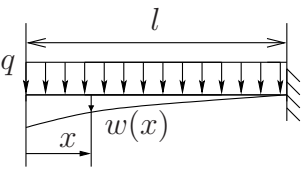
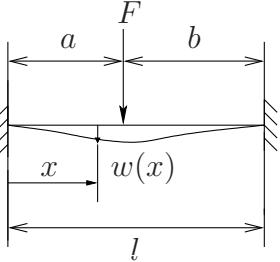
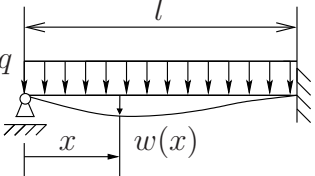
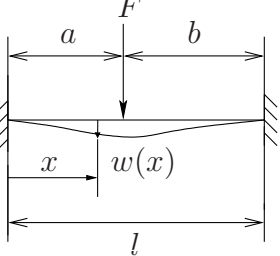
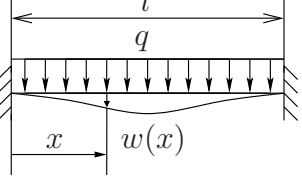
	$0 \leq x \leq a$ $w(x) = \frac{F a b^2}{6 EI} \left[\left(1 + \frac{l}{b}\right) \frac{x}{l} - \frac{x^3}{a b l} \right]$ $a < x \leq l$ $w(x) = \frac{F a^2 b}{6 EI} \left[\left(1 + \frac{l}{a}\right) \frac{l-x}{l} - \frac{(l-x)^3}{a b l} \right]$
	$w(x) = \frac{M l^2}{6 EI} \left[\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right]$
	$w(x) = \frac{q l^4}{24 EI} \left[\frac{x}{l} - 2 \left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right)^4 \right]$
	$w(x) = \frac{F l^3}{6 EI} \left[2 - 3 \frac{x}{l} + \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right]$
	$w(x) = \frac{M l^2}{2 EI} \left[1 - 2 \frac{x}{l} + \left(\frac{x}{l}\right)^2 \right]$
	$w(x) = \frac{q l^4}{24 EI} \left[3 - 4 \frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l}\right)^4 \right]$

Abbildung 7: Biegelinien von Trägern mit konstantem Querschnitt (aus: Dubbel, Taschenbuch für den Maschinenbau, 14. Auflage)

	$0 \leq x \leq a \Rightarrow w(x) = \frac{F l b^2}{4 E I} \left[\frac{a x}{l} - \frac{2}{3} \left(1 + \frac{a}{2l} \right) \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right]$ $a < x \leq l \Rightarrow w(x) = \frac{F l^2 a}{4 E I} \left[\left(1 - \frac{a^2}{l^2} \right) \left(\frac{l-x}{l} \right)^2 - \left(1 - \frac{a^2}{3l^2} \right) \left(\frac{l-x}{l} \right)^3 \right]$
	$w(x) = \frac{q l^4}{48 E I} \left[\frac{x}{l} - 3 \left(\frac{x}{l} \right)^3 + 2 \left(\frac{x}{l} \right)^4 \right]$
	$0 \leq x \leq a \Rightarrow w(x) = \frac{F l b^2}{6 E I} \left[3 \frac{a}{l} \left(\frac{x}{l} \right)^2 - \left(1 + \frac{2a}{l} \right) \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right]$ $a < x \leq l \Rightarrow w(x) = \frac{F l a^2}{6 E I} \left[3 \frac{b}{l} \left(\frac{l-x}{l} \right)^2 - \left(1 + \frac{2b}{l} \right) \left(\frac{l-x}{l} \right)^3 \right]$
	$w(x) = \frac{q l^4}{24 E I} \left[\left(\frac{x}{l} \right)^2 - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^3 + \left(\frac{x}{l} \right)^4 \right]$

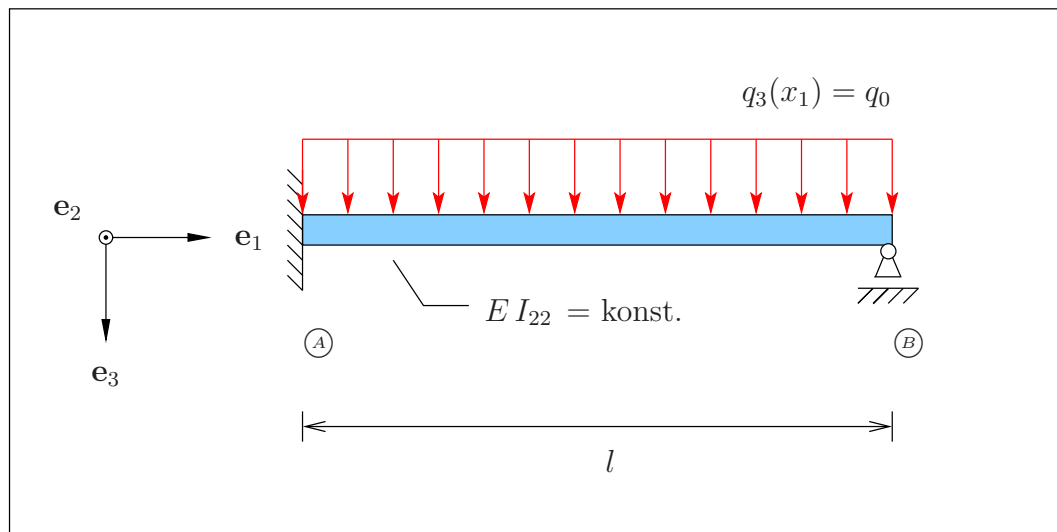


Abbildung 8: Aufgabenstellung

Beispiel:

Gesucht ist der Verlauf der Durchbiegung für das in Abb. 8 skizzierte System.

Freischneiden des Systems liefert die Lagerreaktionen A_V , A_H , M_A und B . Da keine Horizontalbelastung wirkt, werden in der Einspannung nur die Querkraft und das Moment aktiviert, $A_H = 0$. Zur Bestimmung der drei verbleibenden Lagerreaktionen stehen nur zwei Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung. Das statisch unbestimmte System kann also mit den Gleichgewichtsbedingungen alleine nicht berechnet werden.

a) Integration der Biegelinie

Zur Ermittlung der Durchbiegung eines statisch unbestimmten Systems muss die Differentialgleichung der Biegelinie (1.25) integriert werden. Mit $E I_{22}$ folgt für das skizzierte System

$$E I_{22} w'''' = q_3 = q_0. \quad (1.1)$$

Erste Integration:

$$E I_{22} w''' = q_0 x_1 + C_1. \quad (1.2)$$

Zweite Integration:

$$E I_{22} w'' = \frac{1}{2} q_0 x_1^2 + C_1 x_1 + C_2. \quad (1.3)$$

Dritte Integration:

$$E I_{22} w' = \frac{1}{6} q_0 x_1^3 + \frac{1}{2} C_1 x_1^2 + C_2 x_1 + C_3. \quad (1.4)$$

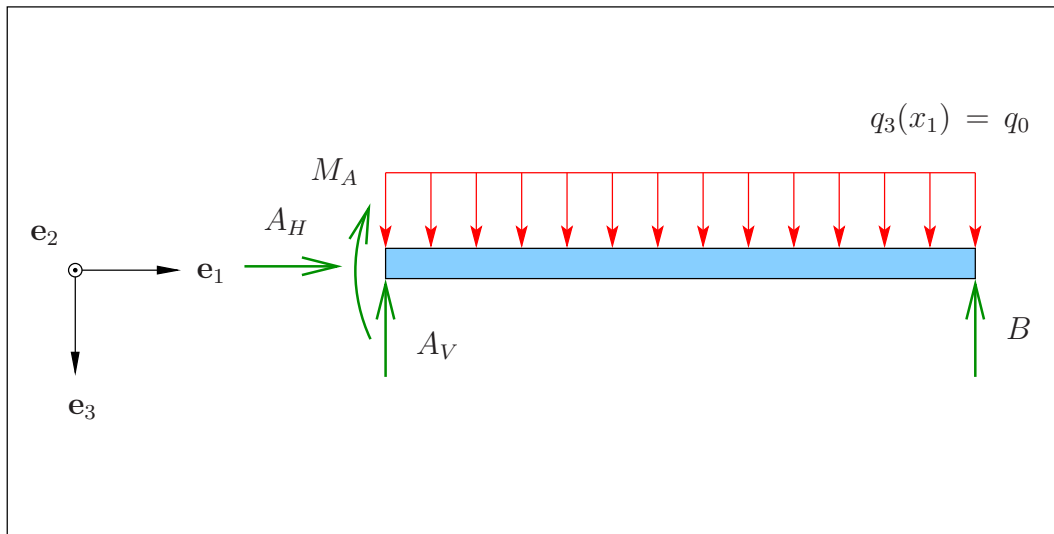


Abbildung 9: Freischnitt

Vierte Integration:

$$E I_{22} w = \frac{1}{24} q_0 x_1^4 + \frac{1}{6} C_1 x_1^3 + \frac{1}{2} C_2 x_1^2 + C_3 x_1 + C_4. \quad (1.5)$$

Die vier Konstanten C_1, \dots, C_4 sind aus den Randbedingungen an der Einspannung \textcircled{A} und am Lager \textcircled{B} zu ermitteln. An der Stelle $x_1 = 0$ gilt (Einspannung)

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad (1.6)$$

und an der Stelle $x_1 = l$ gilt

$$w(l) = 0, \quad M_2(l) = -E I_{22} w''(l) = 0. \quad (1.7)$$

Somit ergeben sich die folgenden vier Bedingungen

$$\begin{aligned} x_1 = 0: \quad w &= 0 \Rightarrow C_4 = 0, \\ w' &= 0 \Rightarrow C_3 = 0, \\ x_1 = l: \quad w &= 0 \Rightarrow q_0 l^4 + 4 C_1 l^3 + 12 C_2 l^2 = 0, \\ w'' &= 0 \Rightarrow q_0 l^2 + 2 C_1 l + 2 C_2 = 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Die Konstanten werden daraus zu

$$C_1 = -\frac{5}{8} q_0 l, \quad C_2 = \frac{1}{8} q_0 l^2, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = 0 \quad (1.9)$$

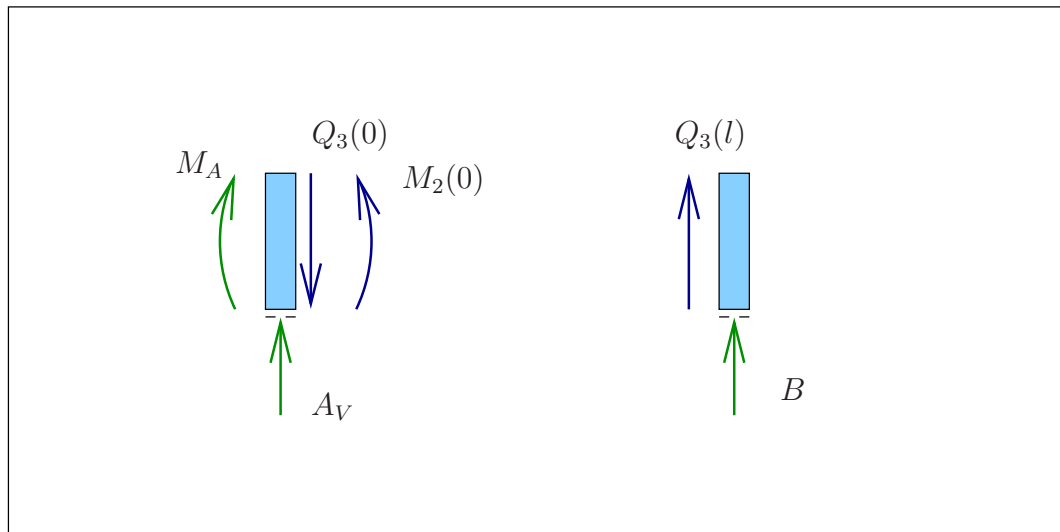


Abbildung 10: Lagerreaktionen

bestimmt. Die Durchbiegung des Balkens erhält man als

$$w(x_1) = \frac{q_0}{E I_{22}} \left(\frac{1}{24} x_1^4 - \frac{5}{48} l x_1^3 + \frac{1}{16} l^2 x_1^2 \right). \quad (1.10)$$

Aus der Biegelinie (1.10) berechnen sich die Schnittgrößen Q_3 und M_2 durch Differentiation gemäß (1.28), nämlich

$$Q_3 = -E I_{22} w''' = -q_0 x_1 + \frac{5}{8} q_0 l \quad (1.11)$$

und

$$M_2 = -E I_{22} w'' = -\frac{1}{2} q_0 x_1^2 + \frac{5}{8} q_0 l x_1 - \frac{1}{8} q_0 l^2. \quad (1.12)$$

Wie in Abb. 10 skizziert, bestimmen sich die Lagerreaktionen in einem zweiten Schritt über das Schnittprinzip aus den Schnittgrößen. Die entsprechenden Gleichgewichtsaussagen lauten

$$\begin{aligned} x_1 = 0: \quad M_A &= M_2(0), \\ A &= Q_3(0), \\ x_1 = l: \quad B &= -Q_3(l). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Die Berechnung der Biegelinie durch Integration löst das statische und das geometrische Problem in einem Schritt.

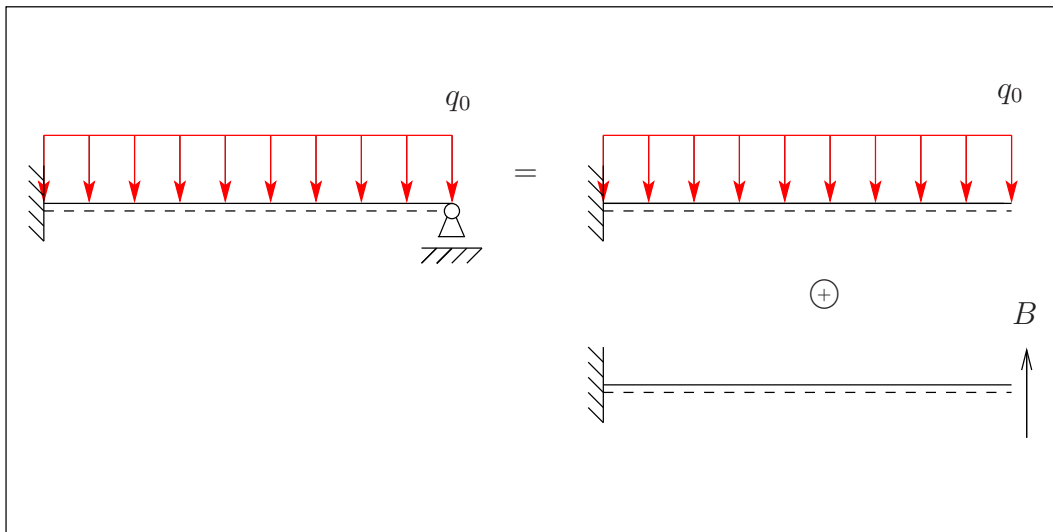


Abbildung 11: Superposition

b) Superposition

Wie beim Stab kann im Fall linearer Gleichungen das statisch unbestimmte System durch Superposition gelöst werden. Dazu wird das System in ein statisch bestimmtes „0“-System und in ein „1“-System aufgeteilt.

Für den einseitig eingespannten Balken mit konstanter Gleichstreckenlast q , d. h. für das „0“-System, berechnet man die Biegelinie zu

$$E I_{22} w^{(0)}(x_1) = \frac{q_0}{24} \left(x_1^4 - 4l x_1^3 + 6l^2 x_1^2 \right). \quad (1.14)$$

Für die Durchbiegung unter der Einzelkraft B des „1“-Systems folgt

$$E I_{22} w^{(1)}(x_1) = \frac{B}{6} \left(x_1^3 - 3l x_1^2 \right). \quad (1.15)$$

Die tatsächlich auftretende Durchbiegung ergibt sich durch Superposition der beiden Lastfälle

$$w(x_1) = w^{(0)} + w^{(1)}. \quad (1.16)$$

Da sich das rechte Ende des Balkens nicht absenken darf, lautet die Kompatibilitätsbedingung

$$w(l) = w^{(0)}(l) + w^{(1)}(l) = \frac{q_0 l^4}{8} - \frac{B l^3}{3} = 0. \quad (1.17)$$

Aus dieser Bedingung berechnet sich die Lagerkraft B zu

$$B = \frac{3 q_0 l}{8}. \quad (1.18)$$

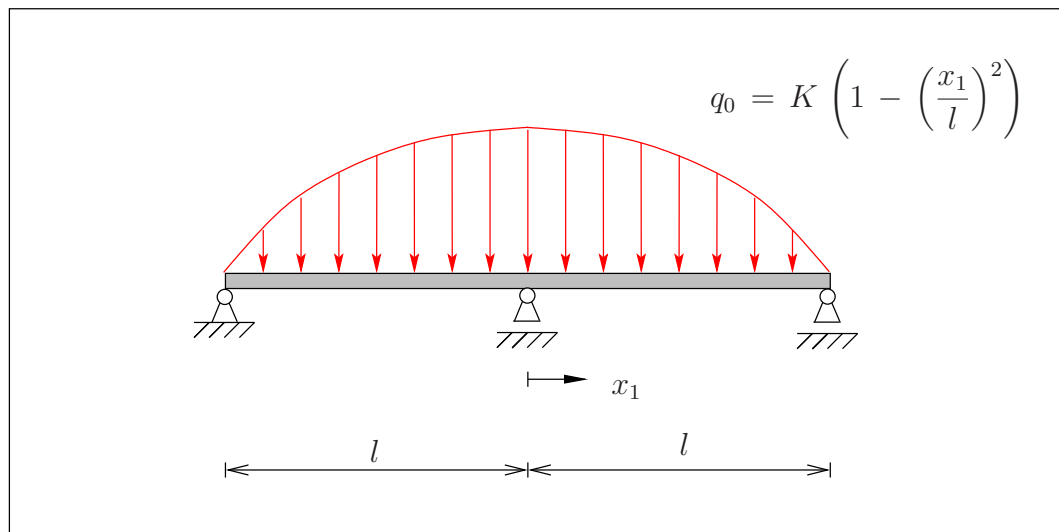


Abbildung 12: Aufgabenstellung

Ergebnisse der Art (1.14) und (1.15) sind in sogenannten Biegelinietafeln für unterschiedliche Belastungen und Randbedingungen tabelliert. Bei Anwendung des Superpositionsprinzips können diese Tabellen vorteilhaft genutzt werden, um die Ergebnisse mit geringen Rechenaufwand zu erzielen.

Beispiel:

Bestimmen Sie die Lagerreaktionen für das in Abb. 12 skizzierte System.

Berechnung mittels Biegelinie:

Zur Berechnung wird das System in zwei Systeme unterteilt, die erst einmal jeweils für sich betrachtet werden. Dadurch besteht nun an der Stelle $x_1 = 0$ die Möglichkeit, dass ein Knick in der Geometrie auftritt, der in Wirklichkeit nicht auftreten kann. Um zu gewährleisten, dass dort kein Knick auftritt, wird gefordert, dass die Verdrehung am rechten Ende des linken Bereichs gleich groß ist wie die Verdrehung am linken Ende des rechten Bereichs, die Balken an dieser Stelle also kompatibel sind. Allgemein müsste man auch sicherstellen, dass an dieser Stelle kein Versatz in der Geometrie auftritt. Dies ist allerdings bereits durch das Lager an der Stelle $x_1 = 0$ gewährleistet.

Wie skizziert wird die Biegelinie abschnittsweise bestimmt:

$$EI w_1'''' = q(x_1) \quad \text{und} \quad EI w_2'''' = q(x_1). \quad (1.19)$$

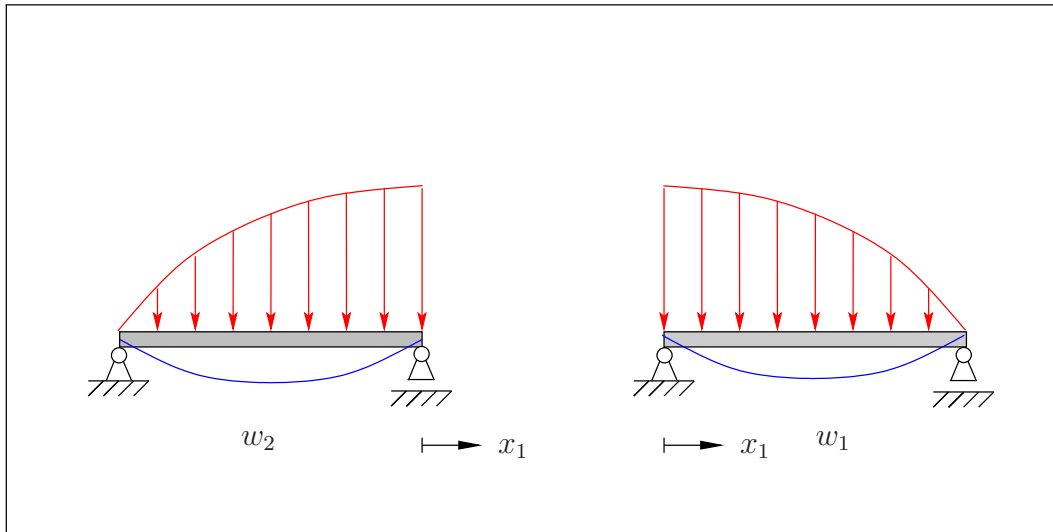


Abbildung 13: Aufspaltung des Systems

Zweifache Integration ergibt das negative Biegemoment $M(x_1)$:

$$\begin{aligned}
 w_1'' &= \frac{K}{EI} \iint \left(1 - \left(\frac{x_1}{l} \right)^2 \right) dx_1 dx_1 \\
 &= \frac{K l^2}{EI} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x_1}{l} \right)^2 - \frac{1}{12} \left(\frac{x_1}{l} \right)^4 \right] + C_1 x_1 + C_2, \\
 w_2'' &= \frac{K l^2}{EI} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x_1}{l} \right)^2 - \frac{1}{12} \left(\frac{x_1}{l} \right)^4 \right] + C_5 x_1 + C_6.
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

Durch dreifache Integration erhält man den Biegewinkel:

$$\begin{aligned}
 w_1' &= \frac{K l^3}{EI} \left[\frac{1}{6} \left(\frac{x_1}{l} \right)^3 - \frac{1}{60} \left(\frac{x_1}{l} \right)^5 \right] + \frac{1}{2} C_1 x_1^2 + C_2 x_1 + C_3 \\
 w_2' &= \frac{K l^3}{EI} \left[\frac{1}{6} \left(\frac{x_1}{l} \right)^3 - \frac{1}{60} \left(\frac{x_1}{l} \right)^5 \right] + \frac{1}{2} C_5 x_1^2 + C_6 x_1 + C_7.
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

Und schließlich die Durchbiegung $w(x_1)$

$$\begin{aligned}
 w_1(x_1) &= \frac{K l^4}{EI} \left[\frac{1}{24} \left(\frac{x_1}{l} \right)^4 - \frac{1}{360} \left(\frac{x_1}{l} \right)^6 \right] \\
 &\quad + \frac{1}{6} C_1 x_1^3 + \frac{1}{2} C_2 x_1^2 + C_3 x_1 + C_4, \\
 w_2(x_1) &= \frac{K l^4}{EI} \left[\frac{1}{24} \left(\frac{x_1}{l} \right)^4 - \frac{1}{360} \left(\frac{x_1}{l} \right)^6 \right] \\
 &\quad + \frac{1}{6} C_5 x_1^3 + \frac{1}{2} C_6 x_1^2 + C_7 x_1 + C_8.
 \end{aligned} \tag{1.22}$$

Als Randbedingungen können identifiziert werden:

- $w_1(x_1 = 0) = 0$ und $w_2(x_1 = 0) = 0$

$$C_4 = 0 \quad \text{und} \quad C_8 = 0, \quad (1.23)$$

- $w_1'(x_1 = 0) = w_2'(x_1 = 0) = 0$

$$C_3 = 0 \quad \text{und} \quad C_7 = 0, \quad (1.24)$$

- $w_1''(x_1 = 0) = w_2''(x_1 = 0)$

$$C_2 = C_6, \quad (1.25)$$

- $w_1''(x_1 = -l) = 0$ und $w_2''(x_1 = l) = 0$

$$\begin{aligned} \frac{5}{12} \frac{K l^2}{EI} - C_1 l + C_2 = 0, \quad \frac{5}{12} \frac{K l^2}{EI} + C_5 l + C_6 = 0, \\ \rightarrow C_1 = -C_5, \end{aligned} \quad (1.26)$$

- $w_1(x_1 = -l) = 0$ und $w_2(x_1 = l) = 0$

$$\begin{aligned} \frac{7}{180} \frac{K l^4}{EI} - \frac{1}{6} C_1 l^3 + \frac{1}{2} C_2 l^2 = 0, \\ \frac{7}{180} \frac{K l^4}{EI} + \frac{1}{6} C_5 l^3 + \frac{1}{2} C_6 l^2 = 0. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Kombination von (1.25), (1.26) und (1.27) führt zu:

$$C_1 = \frac{61 K l}{120 EI}, \quad C_5 = -\frac{61 K l}{120 EI}, \quad C_2 = \frac{11 K l^2}{120 EI}, \quad C_6 = \frac{11 K l^2}{120 EI}. \quad (1.28)$$

Somit:

$$\begin{aligned} w_1(x_1) &= \frac{K l^4}{EI} \left[\frac{1}{24} \left(\frac{x_1}{l} \right)^4 - \frac{1}{360} \left(\frac{x_1}{l} \right)^6 + \frac{61}{720} \left(\frac{x_1}{l} \right)^3 + \frac{11}{240} \left(\frac{x_1}{l} \right)^2 \right], \\ w_2(x_1) &= \frac{K l^4}{EI} \left[\frac{1}{24} \left(\frac{x_1}{l} \right)^4 - \frac{1}{360} \left(\frac{x_1}{l} \right)^6 - \frac{61}{720} \left(\frac{x_1}{l} \right)^3 + \frac{11}{240} \left(\frac{x_1}{l} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Alternative Berechnung mittels Superpositionsprinzip:

Entfernt man das mittlere Lager, wird das System statisch bestimmt, so dass die Biegelinie für den gesamten Balken ermittelt werden kann. Dadurch erhält man jedoch in der Mitte eine Absenkung, die in Wirklichkeit aufgrund des Lagers an dieser Stelle nicht auftreten kann. Dieser geometrische Fehler wird dadurch korrigiert, dass man an dieser Stelle eine Kraft aufbringt, die den Knoten zurück auf seine ursprüngliche Lage bringt. Diese Kraft ist dann gerade

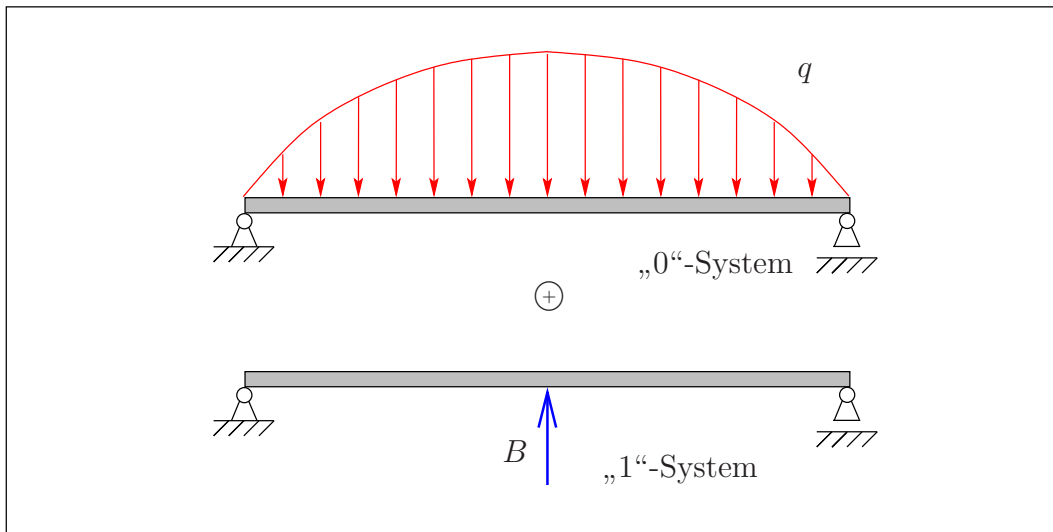


Abbildung 14: Superpositionsprinzip

die Auflagerkraft an dieser Stelle. Durch zweifache Integration der Belastung $q(x_1)$ erhält man den Momentenverlauf im „0“-System

$$M_2^{(0)} = - \int \int q(x_1) dx_1 dx_1 = -K \left(\frac{1}{2} x_1^2 - \frac{1}{12} \frac{x_1^4}{l^2} \right) + C_1 x_1 + C_2. \quad (1.30)$$

Verwendet man die Randbedingungen für den Momentenverlauf $M_2^{(0)}(x_1 = -l) = 0$ und $M_2^{(0)}(x_1 = l) = 0$, lassen sich daraus sofort die Integrationskonstanten C_1 und C_2 bestimmen

$$\begin{aligned} M_2^{(0)}(x_1 = -l) &= -K \left(\frac{1}{2} l^2 - \frac{1}{12} l^2 \right) - C_1 l + C_2 = 0, \\ M_2^{(0)}(x_1 = l) &= -K \left(\frac{1}{2} l^2 - \frac{1}{12} l^2 \right) + C_1 l + C_2 = 0, \\ \rightarrow C_1 &= 0, \quad C_2 = \frac{5}{12} K l^2, \\ \rightarrow M_2^{(0)} &= -K \left(\frac{1}{2} x_1^2 - \frac{1}{12} \frac{x_1^4}{l^2} \right) + \frac{5}{12} K l^2. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Zweifache Integration des Momentenverlaufs liefert die Biegelinie des „0“-Systems

$$EI w^{(0)} = K \left(\frac{1}{24} x_1^4 - \frac{1}{360} \frac{x_1^6}{l^2} - \frac{5}{24} l^2 x_1^2 \right) + C_3 x_1 + C_4. \quad (1.32)$$

Verwendet man nun die Randbedingungen für die Biegelinie $w^{(0)}(x_1 = -l) = 0$

und $w^{(0)}(x_1 = l) = 0$, so erhält man die vollständige Biegelinie des „0“-Systems

$$\begin{aligned}
 EI w^{(0)}(x_1 = -l) &= K \left(\frac{1}{24} l^4 - \frac{1}{360} l^4 - \frac{5}{24} l^4 \right) - C_3 l + C_4, \\
 EI w^{(0)}(x_1 = l) &= K \left(\frac{1}{24} l^4 - \frac{1}{360} l^4 - \frac{5}{24} l^4 \right) + C_3 l + C_4, \\
 \rightarrow C_3 &= 0, \quad C_4 = \frac{61}{360} K l^4, \\
 \rightarrow EI w^{(0)} &= K \left(\frac{1}{24} x_1^4 - \frac{1}{360} \frac{x_1^6}{l^2} - \frac{5}{24} l^2 x_1^2 \right) + \frac{61}{360} K l^4.
 \end{aligned} \tag{1.33}$$

Nützt man die Symmetrie aus, lässt sich auch im „1“-System relativ einfach die Biegelinie ermitteln. Betrachtet man nur die rechte Hälfte des Systems ($x_1 > 0$), so muss wegen des Gelenks am rechten Ende $M_2^{(1)}(x_1 = l) = 0$ und $w^{(1)}(x_1 = l) = 0$ gelten. Durch Ausnutzung der Symmetrie erhält man zusätzlich die Bedingungen $w'^{(1)}(x_1 = 0) = 0$ und $Q^{(1)}(x_1 = l) = \frac{B}{2}$. Die Querkraft ist im rechten Bereich konstant. Also folgt der Momentenverlauf zu

$$\begin{aligned}
 M_2^{(1)}(x_1) &= \frac{B}{2} x_1 + C_5, \\
 M_2^{(1)}(x_1 = l) &= 0, \quad \rightarrow C_5 = -\frac{B}{2} l, \\
 \rightarrow M_2^{(1)}(x_1) &= \frac{B}{2} x_1 - \frac{B}{2} l.
 \end{aligned} \tag{1.34}$$

Einmalige Integration liefert

$$\begin{aligned}
 EI w'^{(1)} &= \frac{B}{2} l x_1 - \frac{B}{4} x_1^2 + C_6, \\
 w'(x_1 = 0) &= 0, \quad \rightarrow C_6 = 0, \\
 EI w'^{(1)} &= \frac{B}{2} l x_1 - \frac{B}{4} x_1^2.
 \end{aligned} \tag{1.35}$$

Nochmalige Integration liefert die Biegelinie des „1“-Systems

$$\begin{aligned}
 EI w^{(1)} &= \frac{B}{4} l x_1^2 - \frac{B}{12} x_1^3 + C_7, \\
 w^{(1)}(x_1 = l) &= 0, \quad \rightarrow C_7 = -\frac{B}{6} l^3, \\
 \rightarrow EI w^{(1)} &= \frac{B}{4} l x_1^2 - \frac{B}{12} x_1^3 - \frac{B}{6} l^3.
 \end{aligned} \tag{1.36}$$

Aus der Superposition der beiden Biegelinienverläufe erhält man nun den Gesamtverlauf. Dieser muss die Bedingung erfüllen, dass die Durchbiegung in der Mitte des Balkens zu null wird. Aus dieser Zwangsbedingung lässt sich dann

die Auflagerkraft B bestimmen

$$\begin{aligned} EI w &= K \left(\frac{1}{24} x_1^4 - \frac{1}{360} \frac{x_1^6}{l^2} - \frac{5}{24} l^2 x_1^2 + \frac{61}{360} l^4 \right) + B \left(\frac{1}{4} l x_1^2 - \frac{1}{12} x_1^3 - \frac{1}{6} l^3 \right), \\ w(x_1 = 0) &= 0 \quad \rightarrow B = \frac{61}{60} K l, \\ \rightarrow w(x_1) &= \frac{K l^4}{EI} \left[\frac{1}{24} \left(\frac{x_1}{l} \right)^4 - \frac{1}{360} \left(\frac{x_1}{l} \right)^6 - \frac{61}{720} \left(\frac{x_1}{l} \right)^3 + \frac{11}{240 EI} \left(\frac{x_1}{l} \right)^2 \right]. \end{aligned} \tag{1.37}$$

1.5 Flächenträgheitsmomente

1.5.1 Flächenmomente 1. Ordnung

Flächenmomente 1. Ordnung traten bereits bei der Berechnung des Schwerpunkts auf (vgl. TM I). Sie sind definiert über das Moment einer Fläche bezüglich eines Bezugspunkts \mathcal{O} .

Für ein vektorielles Flächenelement gilt

$$d\mathbf{a} = \mathbf{n} da, \quad (1.38)$$

wobei \mathbf{n} der Normalenvektor senkrecht zum Flächenelement ist und da die Größe des Flächenelements. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wählen wir $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$. Das Flächenelement liegt dann wie in Abb. 15 skizziert in der x_2 - x_3 -Ebene und besitzt die Größe

$$d\mathbf{a} = d\mathbf{x}_2 \times d\mathbf{x}_3 = dx_2 dx_3 \mathbf{e}_1. \quad (1.39)$$

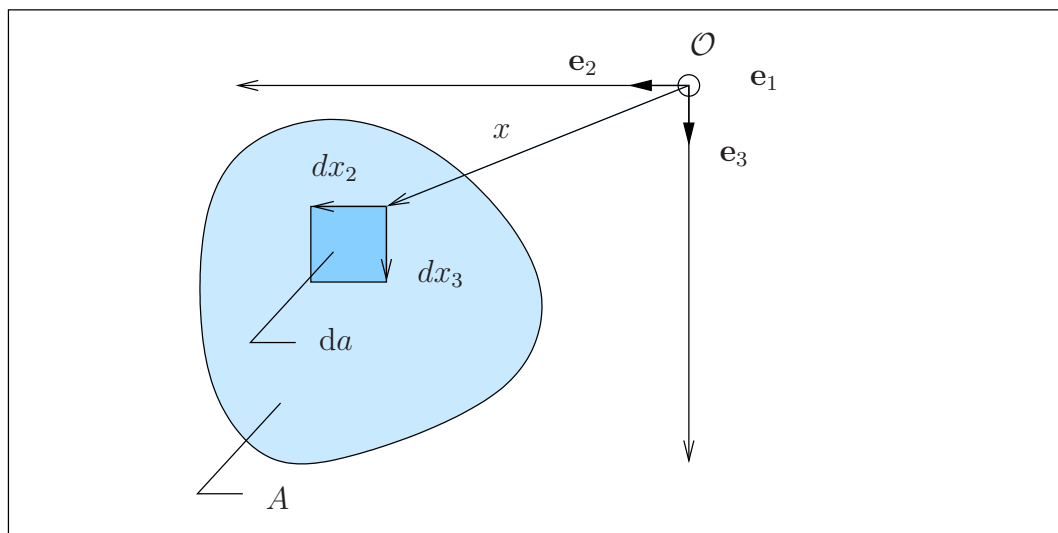


Abbildung 15: Infinitesimales Element einer Querschnittsfläche

Das erste Moment der Fläche A bezgl. \mathcal{O} ist dann als

$$\mathbf{M}_{\mathcal{O}}^1 = \int_A \mathbf{x} \times d\mathbf{a} \quad (1.40)$$

definiert.

Der Ortsvektor \mathbf{x} zu einem Flächenelement da innerhalb der Fläche hat in dem gewählten Bezugssystem die Darstellung

$$\mathbf{x} = x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3. \quad (1.41)$$

Man bildet das Kreuzprodukt

$$\mathbf{x} \times d\mathbf{a} = \mathbf{x} \times \mathbf{e}_1 dx_2 dx_3 = (x_3 \mathbf{e}_2 - x_2 \mathbf{e}_3) da, \quad (1.42)$$

so dass für das Flächenmoment 1. Ordnung nach (1.40) gilt

$$\mathbf{M}_{\mathcal{O}}^1 = \int_A x_3 da \mathbf{e}_2 - \int_A x_2 da \mathbf{e}_3 = S_2 \mathbf{e}_2 - S_3 \mathbf{e}_3. \quad (1.43)$$

Man bezeichnet die Größen S_i als die statischen Momente der Fläche A . Die Indizierung richtet sich nach dem zugehörigen Basisvektor d. h.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_2 & : S_2 = \int_A x_3 da, \\ \mathbf{e}_3 & : S_3 = \int_A x_2 da. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Die Dimension der statischen Momente ist $[L^3]$.

1.5.2 Flächenmomente 2. Ordnung

Flächenmomente 2. Ordnung sind definiert als Moment der Momente 1. Ordnung, also als

$$\mathbf{M}_{\mathcal{O}}^2 = \int_A \mathbf{x} \times (\mathbf{x} \times d\mathbf{a}) = \int_A \mathbf{x} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{n}) da. \quad (1.45)$$

Nach dem Entwicklungssatz (Vektoridentität, vgl. TM I, Anhang A) gilt

$$\mathbf{x} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{n}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{n}. \quad (1.46)$$

Eine weitere Umformung liefert mit der Eigenschaft des dyadischen Produktes (vgl. TM I, Anhang B)

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{x} = (\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \quad (1.47)$$

die Darstellung für das Flächenmoment 2. Ordnung

$$\mathbf{M}_{\mathcal{O}}^2 = \int_A [(\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}) - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{I}] da \cdot \mathbf{n} =: -\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}. \quad (1.48)$$

Dabei wird der Flächenträgheitstensor als

$$\mathbf{J} = \int_A [(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{I} - (\mathbf{x} \otimes \mathbf{x})] da \quad (1.49)$$

definiert.

Bemerkung:

Der Flächenträgheitstensor wird hier mit dem Symbol \mathbf{J} gekennzeichnet, um Verwechslungen mit dem Identitätstensor \mathbf{I} auszuschließen. Um mit der gängigen Literatur konform zu bleiben werden die Koeffizienten jedoch mit I_{ij} gekennzeichnet:

$$\mathbf{J} = I_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j. \quad (1.50)$$



Für den betrachteten ebenen Fall gilt

$$\mathbf{x} = x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = x_2^2 + x_3^2, \quad (1.51)$$

so dass folgt

$$\mathbf{J} = I_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \int_A [(x_2^2 + x_3^2) \delta_{ij} - x_i x_j] da \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j. \quad (1.52)$$

Die Koeffizienten des Flächenträgheitstensors werden als Flächenträgheitsmomente bezeichnet, vgl. (1.11). Die Indizierung richtet sich nach den zugehörigen Basisvektoren. Die Einheit der Flächenträgheitsmomente ist $[L^4]$.

Man nennt

$$\begin{aligned} I_{11} = I_p &= \int_A (x_2^2 + x_3^2) da & : & \text{polares Flächenträgheitsmoment,} \\ I_{22} &= \int_A x_3^2 da & : & \text{axiales Flächenträgheitsmoment,} \\ I_{33} &= \int_A x_2^2 da & : & \text{axiales Flächenträgheitsmoment,} \\ I_{23} = I_{32} &= - \int_A x_2 x_3 da & : & \text{Deviationsmoment.} \end{aligned} \quad (1.53)$$

1.5.3 Verschiebung des Bezugssystems

Als Referenzbezugssystem wird ein Basissystem gewählt, das im Schwerpunkt der betrachteten Fläche liegt. Flächenträgheitsmomente mit Bezug auf ein Basissystem im Flächenschwerpunkt heißen „Eigen-Trägheitsmomente“. Zur Unterscheidung der unterschiedlichen Basissysteme wird das Basissystem im Flächenschwerpunkt mit $\bar{\mathbf{e}}_i$ bezeichnet, ein beliebig gegenüber diesem System verschobenes Basissystem wird mit $\hat{\mathbf{e}}_i$ gekennzeichnet, vgl. Abb. 16.

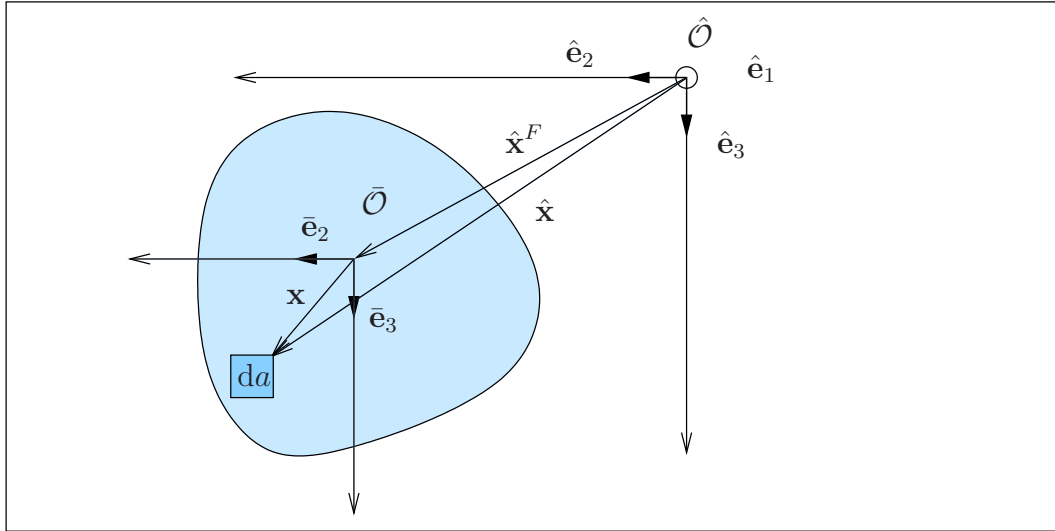


Abbildung 16: Schwerpunktsystem $\bar{\mathbf{e}}_i$ und verschobenes Basissystem $\hat{\mathbf{e}}_i$

Mit der Darstellung des Ortsvektors bzgl. des Schwerpunktsystems

$$\mathbf{x} = \bar{x}_2 \bar{\mathbf{e}}_2 + \bar{x}_3 \bar{\mathbf{e}}_3 \quad (1.54)$$

folgt aus (1.53) für die Eigenträgheitsmomente

$$\bar{I}_{22} = \int_A \bar{x}_3^2 da, \quad \bar{I}_{33} = \int_A \bar{x}_2^2 da, \quad \bar{I}_{23} = - \int_A \bar{x}_2 \bar{x}_3 da. \quad (1.55)$$

Für das parallel verschobene Bezugssystem ergibt sich der Ortsvektor zu

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \hat{\mathbf{x}}^F. \quad (1.56)$$

Dann gilt für den Flächenträgheitstensor

$$\hat{\mathbf{J}} = \int_A [(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}) \mathbf{I} - \hat{\mathbf{x}} \otimes \hat{\mathbf{x}}] da. \quad (1.57)$$

Damit ergibt sich

$$\hat{\mathbf{J}} = \int_A [(\mathbf{x} + \hat{\mathbf{x}}^F) \cdot (\mathbf{x} + \hat{\mathbf{x}}^F) \mathbf{I} - (\mathbf{x} + \hat{\mathbf{x}}^F) \otimes (\mathbf{x} + \hat{\mathbf{x}}^F)] da. \quad (1.58)$$

Berücksichtigt man, dass das statische Moment im Bezug auf ein Schwerpunktsystem verschwindet,

$$\int_A \mathbf{x} da = \mathbf{0}, \quad (1.59)$$

und dass die Fläche durch

$$A = \int da \quad (1.60)$$

gegeben ist, so findet man nach Ausmultiplikation von (1.58) für den Flächenträgheitstensor bzgl. des verschobenen Bezugssystems

$$\hat{\mathbf{J}} = \bar{\mathbf{J}} + [(\hat{\mathbf{x}}^F \cdot \hat{\mathbf{x}}^F) \mathbf{I} - \hat{\mathbf{x}}^F \otimes \hat{\mathbf{x}}^F] A. \quad (1.61)$$

Dieses Ergebnis wird als Satz von Steiner (1796–1863) bezeichnet. Für die Koeffizienten bezüglich der verschobenen Achsen gilt somit

$$\hat{I}_{ij} = \bar{I}_{ij} + [((\hat{x}_2^F)^2 + (\hat{x}_3^F)^2) \delta_{ij} - \hat{x}_i^F \hat{x}_j^F] A. \quad (1.62)$$

Konkret ergeben sich die axialen Flächenträgheitsmomente und die Deviationsmomente bzgl. des parallel verschobenen Koordinatensystems zu

$$\begin{aligned} \hat{I}_{22} &= \bar{I}_{22} + (\hat{x}_3^F)^2 A, \\ \hat{I}_{33} &= \bar{I}_{33} + (\hat{x}_2^F)^2 A, \\ \hat{I}_{23} = \hat{I}_{32} &= \bar{I}_{23} - \underbrace{\hat{x}_2^F \hat{x}_3^F}_{\text{Steiner-Anteile}} A. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Steiner-Anteile

Die Flächenträgheitsmomente im verschobenen Bezugssystem ergeben sich aus den Eigenträgheitsmomenten bzgl. der Schwerpunktsachsen und der mit dem Abstand zum Quadrat gewichteten Flächen. Diese Anteile werden als Steineranteile bezeichnet.

Bemerkung:

Bezüglich der Schwerpunktsachsen werden die Flächenträgheitsmomente minimal, da die Steineranteile verschwinden. Bei Anwendung der Formeln (1.61) – (1.63) muss ein System ein Schwerpunktsystem sein. Findet eine Parallelverschiebung der Achsen statt, ohne dass eines der Koordinatensysteme ein Schwerpunktsystem ist, so muss der Satz von Steiner zweimal angewandt werden, indem das Koordinatensystem zuerst in den Flächenschwerpunkt verschoben wird und von da aus in Ausgangslage, Abb. 17. ■

Für die Berechnung von Trägheitsmomenten zusammengesetzter Querschnitte ist der Steinersche Satz hilfreich, wenn für die Teilflächen die Eigenträgheitsmomente bekannt sind.

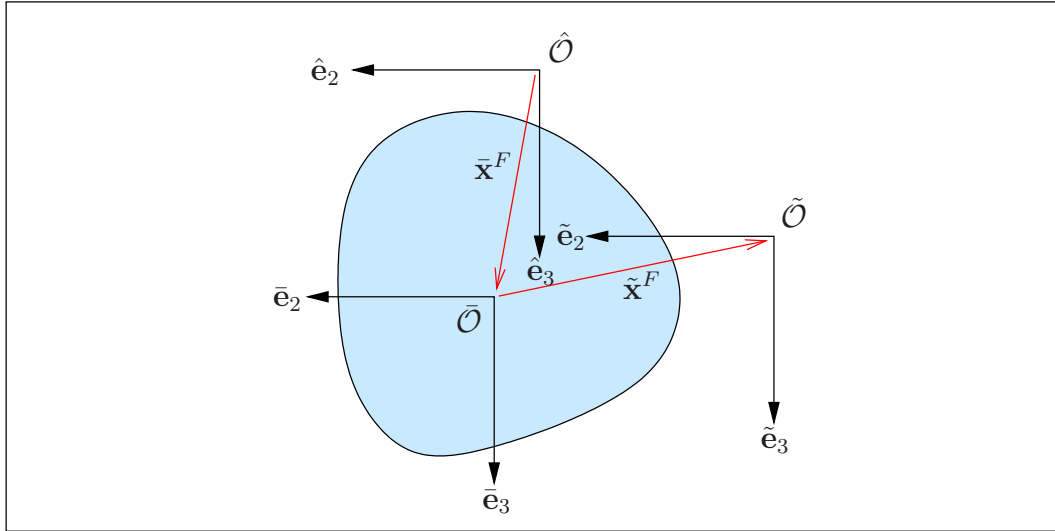


Abbildung 17: Satz von Steiner: Zweifache Anwendung

1.5.4 Drehung des Bezugssystems

Neben einer Translation des Bezugssystems kann auch eine Rotation des Bezugssystems zugelassen werden. Die Drehung des Bezugssystems gemäß Abb. 18 hat für die Darstellung von Tensoren einen Einfluss. Dies wurde für einen Tensor zweiter Stufe bereits für den Spannungstensor (TM I, Kapitel 11) diskutiert. In diesem Fall bleibt der Bezugspunkt erhalten, die Basisvektoren werden gedreht. O. B. d. A. wird die Drehung eines Bezugssystems im Schwerpunkt der Fläche betrachtet. Liegt das Koordinatensystem nicht im Flächenschwerpunkt, so kann es unter Anwendung des Satzes von Steiner dorthin verschoben werden. Für die gedrehten Basisvektoren gilt

$$\tilde{\mathbf{e}}_i = \mathbf{R} \cdot \bar{\mathbf{e}}_i \quad \text{bzw.} \quad \bar{\mathbf{e}}_i = \mathbf{R}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_i =: \tilde{\mathbf{R}} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_i. \quad (1.64)$$

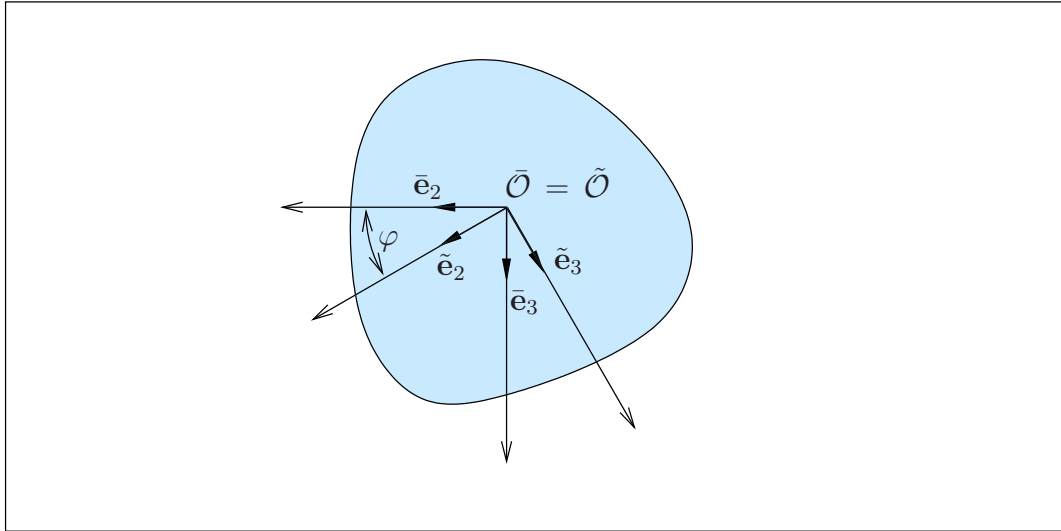
Die Drehung wird dabei durch einen orthogonalen Tensor mit der Eigenschaft

$$\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}, \quad \det \mathbf{R} = 1 \quad (1.65)$$

charakterisiert.

Betrachtet man eine Fläche in der \mathbf{e}_2 – \mathbf{e}_3 -Ebene, so muss der orthogonale Tensor \mathbf{R} eine Rotation um die \mathbf{e}_1 -Achse beschreiben. Dementsprechend gilt

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad \text{mit} \quad \mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1} = \tilde{\mathbf{R}}. \quad (1.66)$$

Abbildung 18: Um φ rotiertes Basissystem $\hat{\mathbf{e}}_i$

Somit ergeben sich die folgenden Darstellungen des Flächenträgheitstensors im Schwerpunktsystem $\bar{\mathbf{e}}_i$ und im gedrehten System $\tilde{\mathbf{e}}_i$

$$\mathbf{J} = \bar{I}_{ij} \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j = \tilde{I}_{ij} \tilde{\mathbf{e}}_i \otimes \tilde{\mathbf{e}}_j. \quad (1.67)$$

Mit der Transformation (1.64) folgt schließlich durch Einsetzen für die beiden Koeffizientenschemata

$$\tilde{I}_{ij} = \tilde{R}_{ik} \bar{I}_{kl} \tilde{R}_{jl}. \quad (1.68)$$

Analog zur Transformation des Spannungstensors findet man für die transformierten Koeffizienten

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{22} &= \bar{I}_{22} \cos^2 \varphi + \bar{I}_{33} \sin^2 \varphi + 2 \bar{I}_{23} \sin \varphi \cos \varphi, \\ \tilde{I}_{33} &= \bar{I}_{22} \sin^2 \varphi + \bar{I}_{33} \cos^2 \varphi - 2 \bar{I}_{23} \sin \varphi \cos \varphi, \\ \tilde{I}_{23} = \tilde{I}_{32} &= -(\bar{I}_{22} - \bar{I}_{33}) \sin \varphi \cos \varphi + \bar{I}_{23} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi). \end{aligned} \quad (1.69)$$

Unter Berücksichtigung der Additionstheoreme folgt schließlich die Darstellung

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{22} &= \frac{1}{2}(\bar{I}_{22} + \bar{I}_{33}) + \frac{1}{2}(\bar{I}_{22} - \bar{I}_{33}) \cos(2\varphi) + \bar{I}_{23} \sin(2\varphi), \\ \tilde{I}_{33} &= \frac{1}{2}(\bar{I}_{22} + \bar{I}_{33}) - \frac{1}{2}(\bar{I}_{22} - \bar{I}_{33}) \cos(2\varphi) - \bar{I}_{23} \sin(2\varphi), \\ \tilde{I}_{23} = \tilde{I}_{32} &= -\frac{1}{2}(\bar{I}_{22} - \bar{I}_{33}) \sin(2\varphi) + \bar{I}_{23} \cos(2\varphi). \end{aligned} \quad (1.70)$$

Die Hauptträgheitsachsen ergeben sich aus dem Eigenwertproblem des Trägheitstensors. Die entsprechende Diskussion wurde in TM I für den Spannungstensor geführt, der bzgl. der Hauptachsen Diagonalgestalt annimmt. Aus den

Gleichungen (1.70) ergibt sich die Lage der Hauptträgheitsachsen aus der Forderung, dass der Trägheitstensor Diagonalfom annimmt,

$$\tilde{I}_{23} \stackrel{!}{=} 0 \quad \rightarrow \quad \varphi^* . \quad (1.71)$$

Durch Einsetzen von φ^* in die Gleichungen (1.70)_{1,2} ergeben sich die Werte der Hauptträgheitsmomente.

Bemerkung:

Die Berechnung der Hauptträgheitsmomente entspricht der Berechnung der Hauptspannungen. Die graphische Lösung des Problems geschieht mit dem Mohrschen Kreis, vgl. TM I, Kap. 10. ■

1.6 Schiefe Biegung

Bislang haben wir angenommen, dass die Belastungsebene und die Verformungsebene identisch sind. In diesem Fall bezeichnet man den Biegevorgang als „gerade Biegung“. Dies muss nicht immer der Fall sein. Man spricht dann von „schiefer Biegung“. Für die schiefe Biegung soll nun die Theorie für einen Bernoulli-Balken entwickelt werden. Wir treffen dabei die folgenden Annahmen:

- Der Balken ist gerade mit veränderlichem Querschnitt $A(x_1)$. Am geraden Balken sind das Zug- und das Biegeproblem entkoppelt. Wir betrachten im Weiteren nur das Biegeproblem.
- Ebene Querschnitte bleiben auch nach der Deformation eben. Querschnitte, die vor der Deformation senkrecht zur Balkenachse stehen, sind nach der Deformation senkrecht zur deformierten Achse (Bernoulli-Annahmen). Diese Annahmen führen zu einem schubstarrten Balken, d. h. aus der Deformation folgen keine Schubspannungen und dementsprechend keine Querkräfte. Diese sind vielmehr über eine Gleichgewichtsbetrachtung zu ermitteln, vgl. Kapitel ??.
- Das Bezugssystem mit den Basisvektoren \mathbf{e}_i liegt im Schwerpunkt der Querschnittsfläche, Abb. 19.

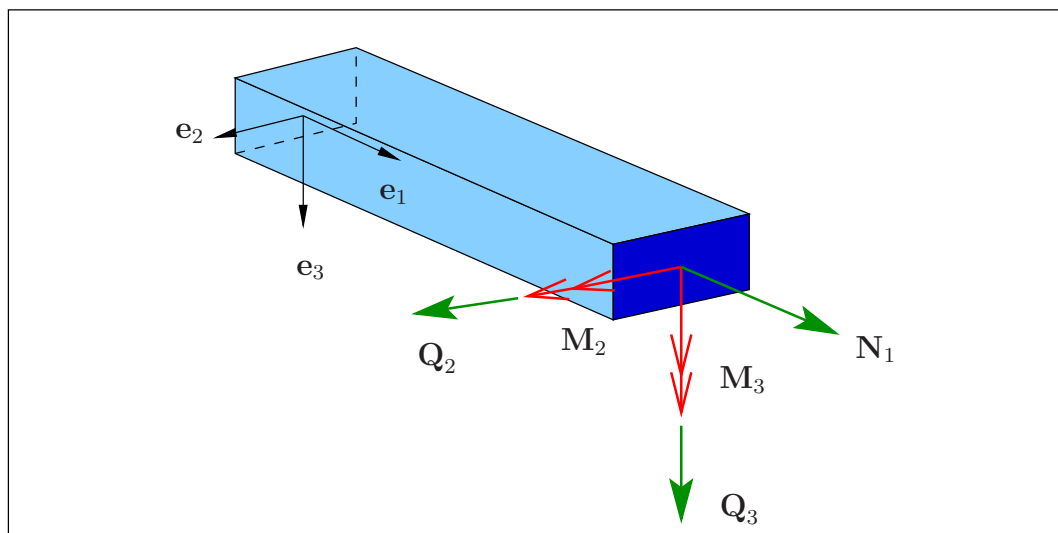


Abbildung 19: Belastungen der schiefen Biegung

Bei Betrachtung des reinen Biegeproblems ergibt sich die folgende Kinematik: Alle Punkte eines Querschnitts erfahren jeweils die gleiche Verschiebung in

\mathbf{e}_2 - und \mathbf{e}_3 -Richtung. In \mathbf{e}_1 -Richtung ergibt sich die Verschiebung durch die Verdrehungen φ_2 und φ_3 um die \mathbf{e}_2 - und \mathbf{e}_3 -Achsen gemäß Abb. 20. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Drehwinkel klein sind, sodass $\sin \varphi_i \approx \varphi_i$, $\cos \varphi_i \approx 1$ gilt (geometrisch lineare Theorie). Eine Verschiebung des Flächenschwerpunktes in \mathbf{e}_1 -Richtung findet beim reinen Biegeproblem nicht statt.

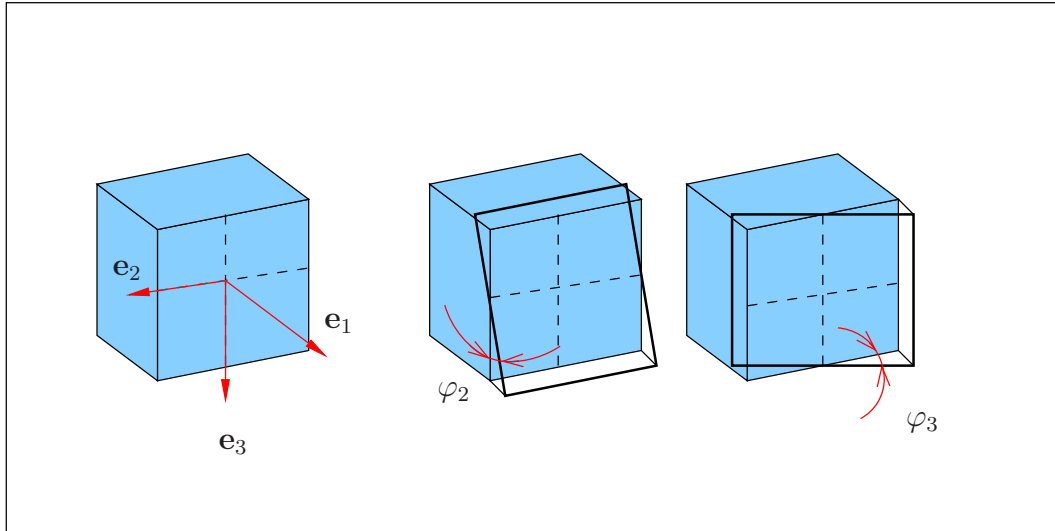


Abbildung 20: Verdrehungen des Querschnitts

Für den Verschiebungsvektor eines Punktes \mathbf{x} gilt dann

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3 \\ &= \underbrace{(x_3 \varphi_2 - x_2 \varphi_3)}_{=: u} \mathbf{e}_1 + \underbrace{u_2^A}_{=: v} \mathbf{e}_2 + \underbrace{u_3^A}_{=: w} \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Einen Anteil $u_1^A(x_1)$ erhält man nur in Kombination mit dem Normalkraftproblem, so dass dieser Teil hier nicht berücksichtigt wird.

Damit kann die Dehnungsverteilung in der Querschnittsfläche berechnet werden

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x_1} = x_3 \frac{d\varphi_2}{dx_1} - x_2 \frac{d\varphi_3}{dx_1} = x_3 \varphi_2' - x_2 \varphi_3'. \quad (1.73)$$

Die zweite Bernoulli-Annahme liefert die Forderungen

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = 0, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = 0. \quad (1.74)$$

Für den Verschiebungszustand nach (1.72) ergibt sich daraus der Zusammenhang

$$\varphi_2 = -\frac{\partial u_3}{\partial x_1} = -w', \quad \varphi_3 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = v' \quad (1.75)$$

zwischen der Drehung der Querschnittsfläche und der Ableitung der Auslenkung der Balkenachse. Aufgrund der Forderung (1.74) liefert das Stoffgesetz keine Schubspannungen, sondern nur Normalspannungen in Balkenlängsrichtung

$$\sigma_{11} = E \varepsilon_{11} = E (x_3 \varphi'_2 - x_2 \varphi'_3). \quad (1.76)$$

Aus dieser Spannungsverteilung resultieren die folgenden Schnittgrößen

$$\begin{aligned} N_1 &= \int_A \sigma_{11} da = E \varphi'_2 \int_A x_3 da - E \varphi'_3 \int_A x_2 da, \\ M_2 &= \int_A x_3 \sigma_{11} da = E \varphi'_2 \int_A x_3^2 da - E \varphi'_3 \int_A x_2 x_3 da, \\ M_3 &= - \int_A x_2 \sigma_{11} da = E \varphi'_3 \int_A x_2^2 da - E \varphi'_2 \int_A x_2 x_3 da. \end{aligned} \quad (1.77)$$

Da die statischen Momente bzgl. der Schwerpunktsachsen Null sind,

$$\int_A x_2 da = \int_A x_3 da = 0, \quad (1.78)$$

verursacht die reine Biegung keine Normalkraft im Balken (Entkopplung des Zug- und Biegeproblems). Die resultierenden Biegemomente können mit der Definition der Trägheitsmomente

$$I_{22} = \int_A x_3^2 da, \quad I_{33} = \int_A x_2^2 da, \quad I_{23} = - \int_A x_2 x_3 da \quad (1.79)$$

dargestellt werden als

$$\begin{aligned} M_2 &= E I_{22} \varphi'_2 + E I_{23} \varphi'_3, \\ M_3 &= E I_{23} \varphi'_2 + E I_{33} \varphi'_3. \end{aligned} \quad (1.80)$$

Da als Bezugssystem ein Schwerpunktsystem gewählt wurde, handelt es sich bei den Trägheitsmomenten nach (1.79) um die Eigenträgheitsmomente

$$I_{22} = \bar{I}_{22}, \quad I_{33} = \bar{I}_{33}, \quad I_{23} = \bar{I}_{23}. \quad (1.81)$$

Die Beziehungen (1.80) kann man nach φ'_2 und φ'_3 auflösen und erhält

$$\varphi'_2 = -w'' = \frac{I_{33} M_2 - I_{23} M_3}{E (I_{22} I_{33} - I_{23}^2)}, \quad \varphi'_3 = v'' = \frac{I_{22} M_3 - I_{23} M_2}{E (I_{22} I_{33} - I_{23}^2)}. \quad (1.82)$$

Setzt man dieses Ergebnis in den Normalspannungsverlauf (1.76) ein, so folgt

$$\sigma_{11} = \frac{(I_{33} M_2 - I_{23} M_3) x_3 - (I_{22} M_3 - I_{23} M_2) x_2}{I_{22} I_{33} - I_{23}^2}. \quad (1.83)$$

Wie bei der geraden Biegung stellt sich auch bei schiefer Biegung eine lineare Spannungsverteilung in der Querschnittsfläche ein. Falls das Bezugssystem ein Hauptträgheitsachsensystem darstellt, sind die Deviationsmomente Null,

$$I_{23} = 0, \quad (1.84)$$

so dass in (1.83) die Kopplungen zwischen den beiden Richtungen entfallen. In diesem Fall gilt mit Bezug auf die Hauptträgheitsachsen

$$\sigma_{11} = \frac{M_2 x_3}{I_{22}} - \frac{M_3 x_2}{I_{33}}. \quad (1.85)$$

Bemerkung:

Wenn neben einer Biegebeanspruchung auch eine Normalkraftbeanspruchung stattfindet, so ist in der Spannungsverteilung nach (1.83) bzw. (1.85) zusätzlich ein konstanter Anteil $\sigma_{11}^N = N_1/A$ zu berücksichtigen. Die neutrale Faser für ein Hauptträgheitssystem ist dann durch die Bedingung

$$\sigma_{11} = 0 \quad \rightarrow \quad x_3^N = -\frac{N_1 I_{22}}{M_2 A} + \frac{M_3 I_{22}}{M_2 I_{33}} x_2^N \quad (1.86)$$

festgelegt, d. h. es gibt eine Gerade in der Querschnittsfläche, in der die Normalspannungen zu Null werden. ■

Die Biegelinie der schiefen Biegung ergibt sich aus der Kombination der inkrementellen Schnittgrößenbeziehungen (Gleichgewicht; (1.21))

$$M_2'' = -q_3, \quad M_3'' = q_2, \quad (1.87)$$

wobei die Vorzeichen aus der Wahl des Koordinatensystems resultieren, mit dem Stoffgesetz (1.82) und der Kinematik (1.75). Unter der Annahme, dass die Flächenträgheitsmomente und der Elastizitätsmodul E konstant sind, liefert zweimaliges Ableiten von (1.82) mit Einsetzen von (1.87) die Gleichungen für schiefe Biegung

$$w'''' = \frac{I_{33} q_3 + I_{23} q_2}{E (I_{22} I_{33} - I_{23}^2)}, \quad v'''' = \frac{I_{22} q_2 + I_{23} q_3}{E (I_{22} I_{33} - I_{23}^2)}. \quad (1.88)$$

2 Praktische Aufgabenstellung

Im zweiten Teil des Praktikums soll an praktischen Beispielen die im ersten Teil erarbeitete Theorie überprüft werden. An den gegebenen Balken sollen folgende Aufgaben durchgeführt werden:

1. Überprüfen Sie, inwieweit die im Teil I geforderten Voraussetzungen erfüllt sind bzw. wo muss eine Kraft angreifen, damit die Voraussetzungen erfüllt sind?
2. Bestimmen Sie zu jedem der gegebenen Profile
 - (a) den Flächenschwerpunkt
 - (b) die Hauptträgheitsmomente
 - (c) die Haupttrichtungen

Dazu müssen die Profile mit den gegebenen Messgeräten vermessen werden.

3. Bestimmen Sie die Lage der Spannungsnulllinie!
4. Nun wird ein Balken einseitig fest eingespannt und mit einem Gewicht belastet. Die gemessene Verformung ist mit den berechneten Werten zu vergleichen.